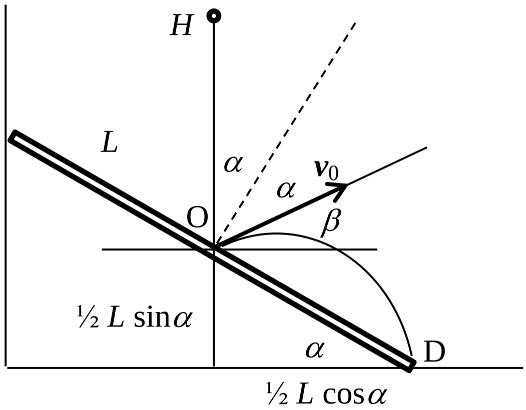
57. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2015/2016
Kategória C – krajské kolo
Riešenie úloh

1. *Odraz na šikmej doske*

Riešenie:

a) Obrázok RC−1. 1b

Vektor $\boldsymbol{v}_0$ rýchlosti po odraze zviera so zvislým smerom uhol 2α a s vodorovnou rovinou uhol $\beta = \pi/2 - 2\alpha$. Podľa veľkosti uhla α, pohyb odrazenej guľôčky v súradniciach (x,y) predstavuje rozličné vrhy: pre $\alpha < \pi/4$ je $\beta > 0$ (šikmý vrh nahor), pre $\alpha = \pi/4$ je $\beta = 0$ (vodorovný vrh), pre $\alpha > \pi/4$ je $\beta < 0$ (šikmý vrh nadol). 2b



Obr. RC−1

b) Pre súradnice trajektórie vzhľadom na začiatok O súradníc umiestnený v strede dosky platia vzťahy

$$x = v_0\, t \cos\beta \qquad (1)$$

$$y = v_0\, t \sin\beta - \frac{1}{2} g\, t^2 . \qquad (2)$$

V bode dopadu $x_\mathrm{d} = \dfrac{L}{2}\cos\alpha$, $y_\mathrm{d} = -\dfrac{L}{2}\sin\alpha$, $t = \tau$.

Po dosadení do (1) a (2)

$$\frac{L}{2}\cos\alpha = v_0\, \tau \cos\beta \qquad (3)$$

$$-\frac{L}{2}\sin\alpha = v_0\, \tau \sin\beta - \frac{1}{2} g\, \tau^2 . \qquad (4)$$

Ak z (3) vyjadríme $v_0\tau$ a dosadíme do (4), úpravou dostaneme vzťah pre dobu letu

$$\tau = \sqrt{\frac{L}{g}\left(\sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\sin\beta\right)} .$$

Ak použijeme vzťahy $\sin\beta = \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, $\cos\beta = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$,

upravíme výsledný vzťah na tvar

$$\tau = \sqrt{\frac{L}{2 g \sin\alpha}} . \qquad (5)$$

Pre dané hodnoty $\tau \approx 0{,}518$ s. 3b

c) Zo vzťahov (3), (5) vyjadríme

$$v_0 = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\sqrt{\frac{L\,g\,\sin\alpha}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L\,g}{2\sin\alpha}}\,. \qquad (6)$$

Pre dané hodnoty $v_0 \approx 2{,}54\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. 2b

d) Pádom z výšky H do miesta odrazu nadobudla guľôčka rýchlosť

$$v_0 = \sqrt{2\,g\left(H - h_0\right)}\,,$$

kde $h_0 = \dfrac{L}{2}\sin\alpha$ je výška stredu dosky nad podlahou.

S použitím (6) máme

$$H = \frac{L}{2}\left(\sin\alpha + \frac{1}{8\sin\alpha}\right).$$ Pre dané hodnoty $H \approx 63{,}7$ cm. 2b

2. *Družica*

Riešenie:

a) Na kružnicovej trajektórii je dostredivá gravitačná sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{g}$ v rovnováhe so zotrvačnou silou $\boldsymbol{F}_\mathrm{o}$

$$G\frac{mM_\mathrm{Z}}{\left(R_\mathrm{Z}+h\right)^2} = m\frac{v^2}{R_\mathrm{Z}+h}\,. \qquad (1)$$

Rýchlosť orbitálneho pohybu

$$v = \sqrt{G\frac{M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}+h}}\,. \qquad (2)$$

Za predpokladu $h << R_\mathrm{Z}$ máme

$$v_0 = \sqrt{G\frac{M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}}} = \sqrt{g\,R_\mathrm{Z}}\,. \qquad (3)$$

Zo vzťahov (3) a (2) dostaneme

$$v_1 = v_0\sqrt{\frac{R_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}+h}} = \sqrt{\frac{G\,M_\mathrm{Z}\,R_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}\left(R_\mathrm{Z}+h\right)}}\,.$$ Predané hodnoty veličín $v \approx 7{,}62\ \mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$. 3b

b) Doba obehu

$$T = \frac{2\pi\,(R_\mathrm{Z}+h)}{v_1} = \frac{2\pi\,(R_\mathrm{Z}+h)}{v_0}\sqrt{1+\frac{h}{R_\mathrm{Z}}}\,.$$

Pre dané hodnoty $T \approx 5{,}67\times10^3$ s $\approx$ 1 h 34,6 m. 2b

c) Pri zvýšení rýchlosti sa začne družica pohybovať po trajektórii v tvare kužeľosečky. Ak prejde na eliptickú trajektóriu, za určitý čas sa vráti k Zemi. Ak však prejde na parabolickú alebo hyperbolickú trajektóriu, k Zemi sa už nevráti.

Pre pohyb v gravitačnom poli Zeme platí zákon zachovania mechanickej energie (súčtu kinetickej a potenciálnej energie)

$$\frac{1}{2}m v_2^2 - G\frac{m M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}+h_1} = \frac{1}{2}m v_3^2 - G\frac{m M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}+h_3}, \qquad (4) \qquad 1\mathrm{b}$$

h_3 a v_3 sú hodnoty v ľubovoľnom bode trajektórie. Družica sa nevráti, ak sa dostane z pôsobenia gravitačného poľa Zeme, tzn. $h_3 \to \infty$ (potenciálna energia má nulovú hodnotu). Minimálna hodnota kinetickej energie $E_{\mathrm{k\,min}} = 0$, tzn. $v_3 = 0$, čo zodpovedá parabolickej trajektórii. Z rovnice (4) potom máme

$$\frac{1}{2}m v_{2\mathrm{m}}^2 - G\frac{m M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}+h_1} = 0, \text{ resp. } v_{2\mathrm{m}} = \sqrt{2G\frac{M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}+h_1}}. \qquad 2\mathrm{b}$$

S použitím vzťahu (3)

$$v_{2\mathrm{m}} = v_0\sqrt{2\frac{R_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}+h_1}} = \sqrt{2}\,v_1.$$ Pre dané hodnoty veličín $v_{2\mathrm{m}} \approx 10{,}8\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}$. 2b

3. *Teplovzdušný balón*

Riešenie:

a) Aby sa balón vznášal v určitej výške, musí byť vztlaková sila F_vz v rovnováhe s tiažovou silou F_g

$$\rho_0 V g = m g + \rho_1 V g, \qquad (1) \qquad 1\mathrm{b}$$

kde hustotu vzduchu v balóne (ρ_1) i okolí (ρ_0) vyjadríme pomocou stavovej rovnice

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{n M_\mathrm{m}}{V} = \frac{M_\mathrm{m}}{V}\frac{p V}{R T} = \frac{p M_\mathrm{m}}{R T}. \qquad 1\mathrm{b}$$

Keďže je balón otvorený, vonkajší a vnútorný tlak vzduchu je rovnaký (p_0). Po dosadení hustoty vzduchu v balóne a okolí (ρ_1, ρ_0) do (1) a úpravou dostaneme teplotu T_1 vzduchu v balóne potrebnú na to, aby balón začal stúpať

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_0} - \frac{m R}{p_0 M_\mathrm{m} V}, \text{ resp. } T_1 = \left(\frac{1}{T_0} - \frac{m R}{p_0 M_\mathrm{m} V}\right)^{-1}, \qquad (2) \qquad 2\mathrm{b}$$

kde $T_0 \approx (273 + 23)$ K = 296 K. Pre dané hodnoty $T_1 \approx 375$ K ≈ 102 °C. 1b

Aby balón začal stúpať, musí byť teplota vzduchu vo vnútri balóna > 102 °C.

b) Vo výške h nad povrchom je teplota vzduchu $t_h = t_0 - k_1 h$, resp. $T_0 - k_1 h$, a tlak vzduchu $p_h = p_0 - k_2 h$, kde $k_1 = 7{,}0\ \mathrm{mK\cdot m^{-1}}$, $k_2 = 12\ \mathrm{Pa\cdot m^{-1}}$. Podmienka rovnováhy (2) pre balón vo výške h má tvar

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{T_h} - \frac{m R}{p_h M_\mathrm{m} V}, \qquad 2\mathrm{b}$$

$$T_2 = \left[\frac{1}{T_0 - k_1 h} - \frac{m R}{(p_0 - k_2 h) M_\mathrm{m} V}\right]^{-1}. \qquad 2\mathrm{b}$$

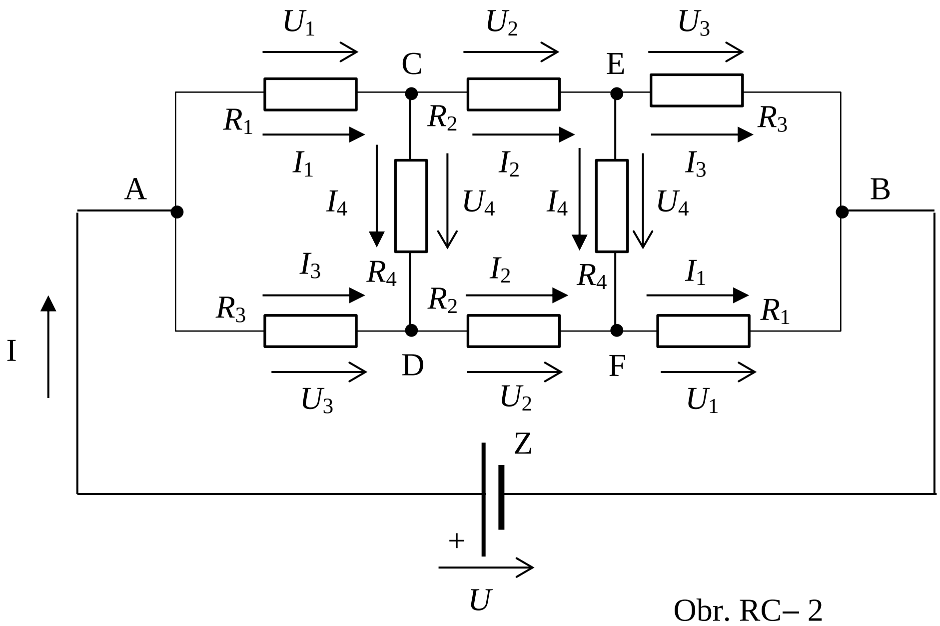
Pre dané hodnoty $T_2 \approx 376$ K ≈ 103 °C. 1b

Z výsledkov a), b) je zrejmé, že na reguláciu výšky balóna stačia iba malé zmeny teploty. Pri veľmi veľkom objeme balóna to však predstavuje pomerne veľkú energiu paliva.

4. *Sústava rezistorov*

Riešenie:

a) Obr. RC–2:



Obr. RC– 2

Jedno z možných vysvetlení:

Obvod má napr. dve slučky ZACEBZ a ZADFBZ, ktoré obsahujú trojicu rovnakých rezistorov, avšak v opačnom poradí. Pomocou 2. Kirchhoffovho zákona (2. KZ) pre uvedené slučky možno dedukovať, že napätia $U_{CE} = U_{DF} = U_2$ sú rovnaké a teda aj prúdy $I_{CE} = I_{DF} = I_2$ sú rovnaké. V slučke CEFD je súčet napätí rovný nule a keďže napätia U_2 na rezistoroch R_2 sú rovnaké, musia byť aj napätia U_{CD} a U_{EF} rovnaké a teda aj prúdy $I_{CD} = I_{EF} = I_4$ sú rovnaké. Z 1. Kirchhoffovho zákona (1. KZ) vyplýva, že prúdy cez obidva rezistory s odporom R_1 sú rovnaké $I_{AC} = I_{FB} = I_1 = I_2 + I_4$, a teda i napätia na obidvoch rezistoroch sú rovnaké $U_{AC} = U_{FB} = U_1$. Podobne $I_{AD} = I_{EB} = I_3$ a teda $U_{AD} = U_{EB} = U_3$.

Pozn.: Iné vysvetlenie môže vychádzať z dôsledného uplatnenia symetrie obvodu vzhľadom na natočenie o 180° v zmysle pomôcky v zadaní.

Obrázok RC–2 1b a vysvetlenie 2b - spolu 3b

b) Pre prúd I zdroja máme (1. KZ)

$$I = I_1 + I_3 = 2\,I_2 \qquad (1)$$

Pre uzol C platí (1. KZ)

$$I_1 = I_2 + I_4 \,. \qquad (2)$$

Pre napätia v prvej slučke máme

$U_1 + U_4 = U_3$, resp. $R_1\, I_1 + R_4\, I_4 = R_3\, I_3$. (2. KZ) (3)

Ďalej platí

$U = U_1 + U_2 + U_3$, resp. $U = R_1\, I_1 + R_2\, I_2 + R_3\, I_3$. (2. KZ) (4)

Z výrazu (3) s pomocou (1), (2) dostaneme

$$R_1\, I_1 + R_4 \left(I_1 - \frac{I}{2} \right) = R_3\, (I - I_1),$$

odkiaľ

$$I_1 = \frac{2R_3 + R_4}{2\,(R_1 + R_3 + R_4)}\, I\,. \qquad (5)$$

Z (1) určíme

$$I_3 = I - I_1 = \frac{2R_1 + R_4}{2\,(R_1 + R_3 + R_4)}\, I\,. \qquad (6)$$

Z výrazu (4)), dosadením za prúdy I_1, I_3 z (5), (6) a $I_2 = I/2$, dostávame

$$R = \frac{U}{I} = R_1 \frac{2R_3 + R_4}{2\,(R_1 + R_3 + R_4)} + \frac{R_2}{2} + R_3 \frac{2R_1 + R_4}{2\,(R_1 + R_3 + R_4)}\,,$$

po úprave napr.

$R = \dfrac{R_2}{2} + \dfrac{4R_1R_3 + R_4\,(R_1 + R_3)}{2\,(R_1 + R_3 + R_4)}$. Pre dané hodnoty $R \approx 53{,}8\ \Omega$. 3b

c) Pre jednotlivé prúdy máme

$$I = \frac{U}{R}$$

$$I_1 = \frac{2R_3 + R_4}{2\,(R_1 + R_3 + R_4)} \frac{U}{R} = \frac{2R_3 + R_4}{4R_1R_3 + R_2R_4 + (R_1 + R_3)(R_4 + R_2)}\, U$$

$$I_2 = \frac{I}{2} = \frac{U}{2R}$$

$$I_3 = \frac{2R_1 + R_4}{4R_1R_3 + R_2R_4 + (R_1 + R_3)(R_4 + R_2)}\, U$$

$$I_4 = I_1 - I_2 = \frac{R_3 - R_1}{2\,(R_1 + R_3 + R_4)}\, I = \frac{R_3 - R_1}{4R_1R_3 + R_2R_4 + (R_1 + R_3)(R_4 + R_2)}\, U\,.$$

Pre dané hodnoty: I = 223 mA, $I_1 \approx$ 146 mA, $I_2 \approx$ 111 mA, $I_3 \approx$ 77,1 mA, $I_4 \approx$ 34,3 mA.

4b

Iný spôsob riešenia, ak žiak pozná transfiguráciu trojuholníka na hviezdu:

Možno použiť premenu (transfiguráciu) trojuholníka ACD a trojuholníka BEF na elektricky ekvivalentné hviezdy, obr. RC–4.

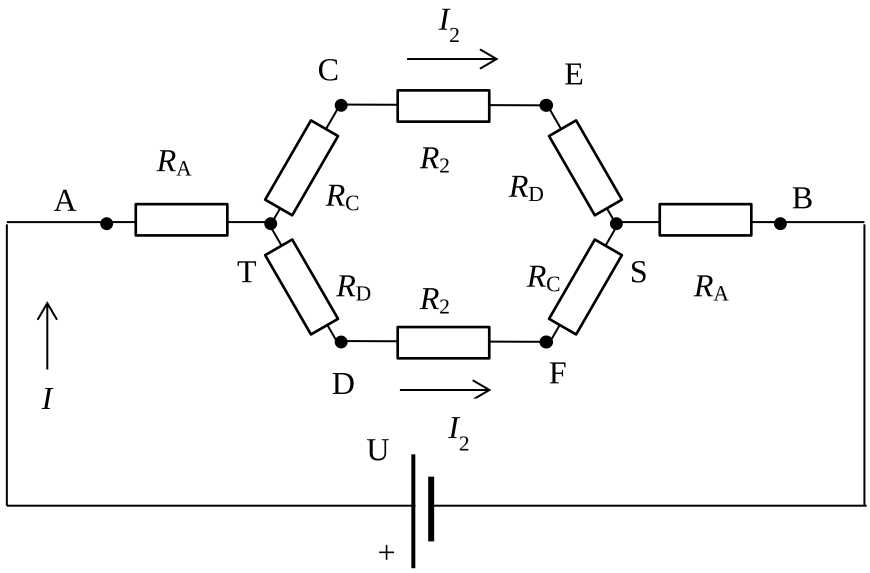
Obidve hviezdy pozostávajú z rovnakých rezistorov R_A, R_C, R_D

$$R_A = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3 + R_4}, \quad R_C = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_3 + R_4}, \quad R_D = \frac{R_3 R_4}{R_1 + R_3 + R_4}.$$

Pre dané hodnoty $R_A \approx 9{,}23\ \Omega$, $R_C \approx 7{,}69\ \Omega$, $R_D \approx 23{,}1\ \Omega$.

Vetvy TCES a TDFS sú rovnaké a paralelné. Odtiaľ tiež vidno, že prúdy v obidvoch rezistoroch R_2 sú rovnaké I_2. Celový odpor medzi bodmi A, B

$$R = 2\,R_A + \frac{1}{2}\left(R_2 + R_C + R_D\right) = \frac{R_2}{2} + \frac{4R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_3 R_4}{2\left(R_1 + R_3 + R_4\right)}.$$



Obr. RC– 4

Celkový prúd $I = \dfrac{U}{R}$ a $I_2 = \dfrac{I}{2}$.

Z porovnania obr. RC–3 a obr. RC–4

$$U_{EB} = U_3 = R_3 I_3 = R_D\, I_2 + R_A\, I = \frac{R_3 R_4}{R_1 + R_3 + R_4}\frac{I}{2} + \frac{R_3 R_1}{R_1 + R_3 + R_4} I,$$

odkiaľ máme priamo (6).

Rovnako určíme prúd I_1 – vzťah (5), a potom prúd $I_4 = I_1 - I_2$.

57. ročník Fyzikálnej olympiády – ***Úlohy krajského kola kategórie C***

Autor úloh:	Ľubomír Konrád
Recenzia a úprava:	Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha
Preklad textu do maďarského jazyka:	Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016