58. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2016/2017
Kategória A – celoštátne kolo
Žilina – 8. 4. 2017
Riešenie teoretických úloh

1. Gule na naklonenej rovine

Riešenie:

a) Hmotnosť homogénnej plnej gule $M_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3\,\rho$,

hmotnosť gule s dutinou $M_2 = \frac{4}{3}\pi R_1^3\,\rho - \frac{4}{3}\pi R_2^3\,\rho$.

Pomer hmotností $p = \frac{M_1}{M_2} = \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_2^3} = \frac{r^3}{r^3 - 1}$,

odkiaľ máme $r = \sqrt[3]{\frac{p}{p-1}}$.

b) Moment zotrvačnosti plnej gule $I_1 = \frac{2}{5}M_1 R_1^2 = \frac{8}{15}\pi\rho R_1^5$,

gule s dutinou $I_2 = \frac{8}{15}\pi\rho R_1^5 - \frac{8}{15}\pi\rho R_2^5$.

Pomer momentov zotrvačnosti $k = \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_1^5}{R_1^5 - R_2^5} = \frac{r^5}{r^5 - 1} = \frac{p^{5/3}}{p^{5/3} - (p-1)^{5/3}}$.

c) Obr. RA3–1. Na guľu pôsobia tri sily: $\boldsymbol{F}_\mathrm{g}$ – gravitačná sila, $\boldsymbol{F}_\mathrm{n}$ – tlaková sila dosky, $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ – sila trenia.

d) V smere kolmom na povrch dosky pôsobí na guľu tlaková sila dosky

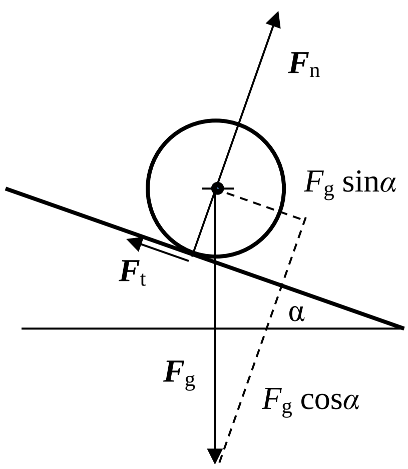
$$F_\mathrm{n} = F_\mathrm{g}\cos\alpha\,.$$

Pohybová rovnica postupného pohybu hmotného stredu gule má tvar

$$M\,a = F_\mathrm{g}\sin\alpha - F_\mathrm{t}\,. \qquad (1)$$

Pohybová rovnica rotačného pohybu okolo vodorovnej osi prechádzajúcej stredom gule

$$I\,\varepsilon = R\,F_\mathrm{t}\,. \qquad (2)$$



Obr. RA3–1

Sú dve možnosti pohybu:
- pohyb je valivý s rýchlosťou v a zrýchlením a hmotného stredu gule $v = \omega R$, resp. $a = \varepsilon R$ podľa vzťahov (1) a (2), trenie je statické $F_\mathrm{t} \le f F_\mathrm{n}$, guľa sa po doske nešmýka.
- guľa sa prešmykuje, tzn. trenie je šmykové $F_\mathrm{t} = f F_\mathrm{n}$.

Pre valivý pohyb platia pohybové rovnice (1) a (2)

$$M\,a = M\,g\sin\alpha - F_{\mathrm{t}}$$

$$I\,\frac{a}{R} = R\,F_{\mathrm{t}}\ ,$$

odkiaľ pre prípad valivého pohybu máme

$$F_{\mathrm{t}} = \frac{M\,g\sin\alpha}{1+\dfrac{M\,R^2}{I}} \le f\,M\,g\cos\alpha\ .$$

Po úprave dostaneme podmienku valivého pohybu gule

$$\tan\alpha \le f\left(1+\frac{M\,R^2}{I}\right) = \tan\alpha_{\mathrm{m}}\ ,$$

teda aj $\alpha \le \alpha_{\mathrm{m}}$. (3)

V prípade plnej gule

$$\frac{M_1\,R_1^2}{I_1} = \frac{5}{2} \text{ a } \tan\alpha_{\mathrm{m1}} = \frac{7}{2}\,f\ .$$

Pre dané hodnoty: tan $\alpha_{\mathrm{m1}} \approx 0{,}42$; $\alpha_{\mathrm{m1}} \approx 23°$, $\alpha \le 23°$.

Pre guľu s dutinou podmienka (3) má tvar

$$\frac{M_2\,R_1^2}{I_2} = \frac{M_1\,R_1^2}{I_1}\,\frac{M_2}{M_1}\,\frac{I_1}{I_2} = \frac{5}{2}\,\frac{p^{2/3}}{p^{5/3}-(p-1)^{5/3}}\ ,$$

$$\tan\alpha_{\mathrm{m2}} = f\left(1+\frac{5}{2}\,\frac{p^{2/3}}{p^{5/3}-(p-1)^{5/3}}\right).$$

Pre dané hodnoty tan $\alpha_{\mathrm{m}} \approx 0{,}33$; $\alpha_{\mathrm{m}} \approx 18°$, $\alpha \le 18°$.

e) Zrýchlenie valivého pohybu

$$a_{\mathrm{v}} = \frac{1}{1+\dfrac{I}{M\,R^2}}\,g\sin\alpha\ , \quad \text{kde } \alpha \le \alpha_{\mathrm{m}}.$$

Ak $\alpha > \alpha_{\mathrm{m}}$, guľa bude pri pohybe na naklonenej rovine prešmykovať, pričom platí

$$M\,a = F_{\mathrm{g}}\sin\alpha - f\,F_{\mathrm{g}}\cos\alpha\ ,$$

odkiaľ máme zrýchlenie pohybu

$$a_{\mathrm{k}} = g\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right) = \left(1-\frac{f}{\tan\alpha}\right)g\sin\alpha\ , \quad \text{kde } \alpha > \alpha_{\mathrm{m}}.$$

Pre $\alpha \to \alpha_{\mathrm{m}}$ $\quad a_{\mathrm{km}} = \dfrac{1}{1+\dfrac{I}{M\,R^2}}\,g\sin\alpha = a_{\mathrm{vm}}$. So zmenou α sa mení zrýchlenie daného telesa spojito, pričom s rastúcim uhlom α rastie.

f) Čas rovnomerne zrýchleného pohybu po dráhe L s nulovou začiatočnou rýchlosťou

$$t = \sqrt{\frac{2L}{a}}\ .$$

Pri uhle $\alpha_1 = 10°$ naklonenej roviny sa obidve gule pohybujú valivým pohybom a relatívny rozdiel časov

$$\tau = 1 - \frac{t_2}{t_1} = 1 - \sqrt{\frac{a_{v1}}{a_{v2}}} = 1 - \sqrt{\frac{1 + \dfrac{I_2}{M_2 R_1^2}}{1 + \dfrac{I_1}{M_1 R_1^2}}} = 1 - \sqrt{\frac{5}{7} + \frac{2}{7}\frac{p^{5/3} - (p-1)^{5/3}}{p^{2/3}}}\ .$$

Pre dané hodnoty $\tau \approx -0{,}060 = -6{,}0$ %. Čas pohybu plnej gule je menší.

Pri uhle $\alpha_2 = 20°$ naklonenej roviny je pohyb plnej gule valivý, dutá guľa sa prešmykuje a relatívny rozdiel časov

$$\tau = 1 - \frac{t_2}{t_1} = 1 - \sqrt{\frac{a_{v1}}{a_{k2}}} = 1 - \sqrt{\frac{1}{\left(1 - \dfrac{f}{\tan\alpha}\right)\left(1 + \dfrac{I_1}{M_1 R_1^2}\right)}} = 1 - \sqrt{\frac{5}{7}\frac{\tan\alpha}{\tan\alpha - f}}\ .$$

Pre dané hodnoty $\tau \approx -0{,}032 = -3{,}2$ %. Čas pohybu plnej gule je menší.

Pri uhle $\alpha = 30°$ naklonenej roviny obidve gule prešmykujú a relatívny rozdiel časov

$$\tau = 1 - \frac{t_2}{t_1} = 1 - \sqrt{\frac{a_{k1}}{a_{k2}}} = 0\ .$$

V tomto prípade obidve gule prekonajú dráhu L za rovnaký čas.

2. *Vysušujúci vietor*

Riešenie:

a) Pre vzduch platí stavová rovnica ideálneho plynu a rovnica polytropického deja

$$pV = nRT\ , \qquad (1)$$

$$pV^k = p_0 V_0^k\ . \qquad (2)$$

Keďže nevieme určiť zmenu objemu vzduchu (priamo merateľné veličiny sú p a T), z rovníc (1) a (2) vylúčime objem V. Veličiny p, V sú funkciami teploty. Aby sme sa zbavili konštantnej hodnoty $p_0 V_0^k$ na pravej strane rovnice (2), obe rovnice derivujeme podľa teploty

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} V + p\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T} = nR\ , \text{ resp. } \mathrm{d}p\, V + p\,\mathrm{d}V = nR\,\mathrm{d}T \qquad (3)$$

$$\frac{dp}{dT} V^k + p k V^{k-1} \frac{dV}{dT} = 0 \text{, resp. } dp\ V + k\, p dV = 0 . \quad (4)$$

Zmenu objemu vylúčime a objem V vyjadríme pomocou rovnice (1)

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{dp}{p} = \frac{dT}{T} . \qquad (5)$$

Tlak vzduchu v gravitačnom poli s výškou klesá

$$dp = -\rho\, g\, dh ,$$

kde $\rho = \dfrac{p M_\mathrm{v}}{RT}$ je hustota vzduchu.

Po dosadení do rovnice (5) máme

$$K = \frac{dT}{dh} = -\left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{M_\mathrm{v}\, g}{R} . \qquad (6)$$

To znamená, že teplota lineárne klesá s nadmorskou výškou.

Pre dané hodnoty $K \approx -7{,}9$ °C/km.

Zodpovedajúce teploty vo výškach h_1 a h_2: $t_1 \approx -10$ °C, $t_2 \approx 20$ °C.

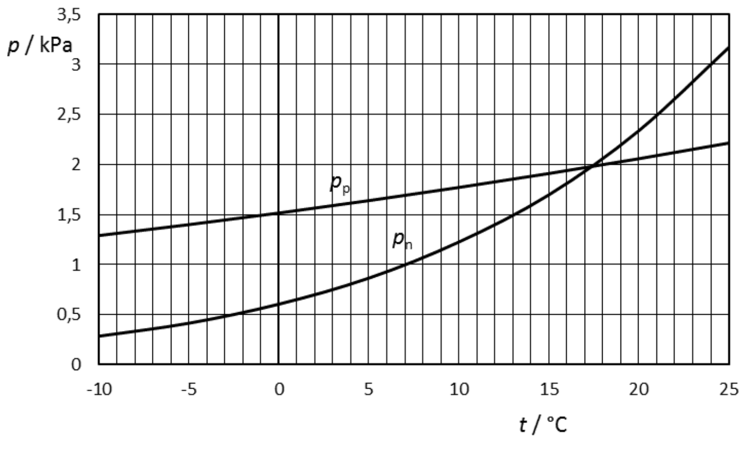
Pozn.: Teplota zemského povrchu je oveľa vyššia v dôsledku priameho zohrievania slnečným žiarením.

b) Z rovníc (1) a (2) dostávame

$$p_\mathrm{p} = p_{\mathrm{p}0} \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{k}{k-1}} . \qquad (7)$$

Pri teplote $t_0 = 25$ °C je podľa tabuľky $p_{\mathrm{n}0} = 3{,}17$ kPa. Parciálny tlak pary pri $\eta_0 = 70$ % je $p_{\mathrm{p}0} = 2{,}22$ kPa.

c) Grafy



Para začne kondenzovať, keď sa stane nasýtenou. Z grafu určíme teplotu priesečníku $t_\mathrm{m} \approx 17{,}2$ °C, čo zodpovedá výške $h_\mathrm{m} \approx 990$ m.

d) Keď vzduch stúpa ďalej, klesá tlak nasýtenej pary rýchlejšie ako parciálny tlak pary, preto voda kondenzuje a para zostáva nasýtená. Pri dosiahnutí maximálnej výšky h_1, tzn. teploty $t_1 \approx -10$ °C je tlak pary $p_{\mathrm{p}1} = p_{\mathrm{n}1} = 0{,}29$ kPa ($\eta_1 = 100$ %).

Vo výške h_2 je teplota $t_2 \approx 20$ °C. Tejto teplote zodpovedá tlak nasýtenej pary (tabuľka) $p_{n2} = 2{,}34$ kPa.

S použitím vzťahu (7)

$$p_{p2} = p_{p1}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Pre dané hodnoty $p_{p2} \approx 0{,}46$ kPa.

Zodpovedajúca relatívna vlhkosť $\eta_2 = p_{p2}/p_{n2} \approx 20$ %.

Táto vlhkosť je mimoriadne nízka.

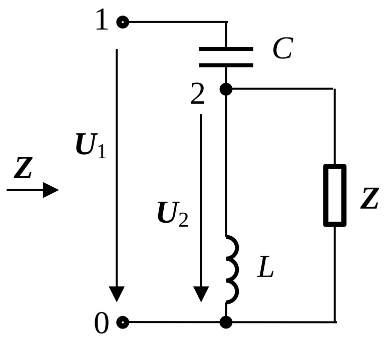
Na satelitnej mape vidno zelené západné svahy pohoria, zatiaľ čo na východ od pohoria sú rozsiahle púšte. V oblasti Las Vegas je úhrnný stav zrážok približne 100 mm/rok.

3. *Mnohonásobný delič napätia*

Riešenie:

a) Keďže je počet členov reťazca nekonečný, bude impedancia zvyšku obvodu pripojenému ku svorkám 2–0 tiež **Z**. Ak zvyšok obvodu nahradíme touto impedanciou, dostaneme obvod podľa obr. RA3–3. Vstupná impedancia tohto obvodu

$$\boldsymbol{Z} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} + \frac{\mathrm{j}\omega L\,\boldsymbol{Z}}{\mathrm{j}\omega L + \boldsymbol{Z}}. \qquad (1)$$



Obr. RA3–3

Vzťah upravíme na tvar kvadratickej rovnice

$$\boldsymbol{Z}^2 - \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\boldsymbol{Z} - \frac{L}{C} = 0,$$

ktorá má riešenie

$$\boldsymbol{Z} = \frac{1}{\mathrm{j}\,2\omega C} \pm \sqrt{-\left(\frac{1}{2\omega C}\right)^2 + \frac{L}{C}}.$$

Výraz pod odmocninou môže byť kladný, potom je odmocnina kladná, alebo záporný, a potom je odmocnina imaginárna.

Medzná uhlová frekvencia, pre ktorú je výraz pod odmocninou nulový

$$-\left(\frac{1}{2\,\omega_m\,C}\right)^2 + \frac{L}{C} = 0\text{, resp. } \omega_m = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{LC}},$$

a impedanciu možno vyjadriť v tvare

$$\boldsymbol{Z} = \sqrt{\frac{L}{C}}\left[-\,\mathrm{j}\,\frac{\omega_m}{\omega} \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)^2}\,\right]. \qquad (2)$$

Ak platí $\omega > \omega_m$ (vysoké frekvencie), impedancia **Z** má reálnu časť, tá predstavuje rezistanciu, ktorá musí byť nezáporná. Preto fyzikálny význam má znamienko (+)

$$\boldsymbol{Z} = \sqrt{\frac{L}{C}}\left[\sqrt{1-\left(\frac{\omega_\mathrm{m}}{\omega}\right)^2} - \mathrm{j}\,\frac{\omega_\mathrm{m}}{\omega}\right]. \qquad (3)$$

Ak je $\omega < \omega_\mathrm{m}$, je impedancia imaginárna

$$\boldsymbol{Z} = \mathrm{j}\sqrt{\frac{L}{C}}\left[-\frac{\omega_\mathrm{m}}{\omega} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_\mathrm{m}}{\omega}\right)^2 - 1}\right].$$

Keď $\omega \to 0$, $Z \to \infty$ (sériový kapacitor), a teda v tomto prípade má fyzikálny význam znamienko (–). Pre znamienko (+) by výraz pre $Z \to 0$.

Impedancia je teda

$$\boldsymbol{Z} = -\,\mathrm{j}\sqrt{\frac{L}{C}}\left[\frac{\omega_\mathrm{m}}{\omega} + \sqrt{\left(\frac{\omega_\mathrm{m}}{\omega}\right)^2 - 1}\right]. \qquad (4)$$

b) Keďže pomery napätí na jednotlivých článkoch nekonečného reťazca sú rovnaké, určíme komplexný napäťový prenos $\boldsymbol{A}_U$ na prvom článku podľa obr. RA3–3.

$$\boldsymbol{A}_U = \frac{\boldsymbol{U}_2}{\boldsymbol{U}_1} = \frac{\dfrac{\mathrm{j}\omega L\,\boldsymbol{Z}}{\mathrm{j}\omega L + \boldsymbol{Z}}}{\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C} + \dfrac{\mathrm{j}\omega L\,\boldsymbol{Z}}{\mathrm{j}\omega L + \boldsymbol{Z}}} = \frac{\boldsymbol{Z} - \dfrac{1}{\mathrm{j}\,\omega C}}{\boldsymbol{Z}} = \frac{\mathrm{j}\,\dfrac{\omega_\mathrm{m}}{\omega} \pm \sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_\mathrm{m}}{\omega}\right)^2}}{-\,\mathrm{j}\,\dfrac{\omega_\mathrm{m}}{\omega} \pm \sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_\mathrm{m}}{\omega}\right)^2}}.$$

Pozn.: Pri úprave prvého zlomku možno s výhodou využiť vzťahy (2) a (3)..

Pre $\omega \le \omega_\mathrm{m}$ (platí znamienko –)

$$\boldsymbol{A}_U = -\frac{\dfrac{\omega_\mathrm{m}}{\omega} - \sqrt{\left(\dfrac{\omega_\mathrm{m}}{\omega}\right)^2 - 1}}{\dfrac{\omega_\mathrm{m}}{\omega} + \sqrt{\left(\dfrac{\omega_\mathrm{m}}{\omega}\right)^2 - 1}},$$

$$A_U = \frac{1-\sqrt{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_\mathrm{m}^2}}}{1+\sqrt{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_\mathrm{m}^2}}} \le 1 \quad \text{a } \varphi = \pi \text{ rad } (180°).$$

Amplitúda napätia postupne klesá (tlmená vlna) a napätia v susedných uzloch sú v protifáze.

Pre $\omega > \omega_\mathrm{m}$ (platí znamienko +)

$$\boldsymbol{A}_U = \frac{\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_\mathrm{m}}{\omega}\right)^2} + \mathrm{j}\,\dfrac{\omega_\mathrm{m}}{\omega}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_\mathrm{m}}{\omega}\right)^2} - \mathrm{j}\,\dfrac{\omega_\mathrm{m}}{\omega}},$$

teda $A_U = 1$ a $\varphi = \pi - 2\arctan\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_\mathrm{m}^2} - 1}$.

Amplitúda napätia U_n pozdĺž reťazca zostáva konštantná (netlmená vlna). Napätia v susedných uzloch majú rovnaké fázové posunutie, tzn. fáza pozdĺž reťazca rovnomerne klesá.

c) Keďže pre $\omega > \omega_\mathrm{m}$ nedochádza k útlmu, tzn. stratám energie, je prenášaný výkon rovný činnému výkonu zdroja. Ak vyjadríme impedanciu $\boldsymbol{Z} = R + \mathrm{j}X$, je činný výkon $P = R\,I^2$.

Pre $$\boldsymbol{Z} = \sqrt{\frac{L}{C} - \left(\frac{1}{2\omega C}\right)^2} - \mathrm{j}\frac{1}{2\omega C} = \sqrt{\frac{L}{C}}\left[\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_\mathrm{m}}{\omega}\right)^2} - \mathrm{j}\,\frac{\omega_\mathrm{m}}{\omega}\right] = R + \mathrm{j}\,X$$

$$P = R\,\frac{U_1^2}{R^2 + X^2} = U_1^2\sqrt{\frac{C}{L}}\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_\mathrm{m}}{\omega}\right)^2}\,.$$

Výkon narastá od hodnoty $P = 0$ pre $\omega = \omega_\mathrm{m}$ až po hodnotu $P \to U_1^2\sqrt{\frac{C}{L}}$ pre $\omega >> \omega_\mathrm{m}$.

4. *Rádiometrické datovanie*

Riešenie:

a) Nukleónové číslo sa mení iba v dôsledku α–premeny (nukleónové číslo klesne o 4). Protónové číslo pri α–premene klesne o 2, pri β–premene narastie o 1.

$^{235}_{92}\mathrm{U} \to {}^{207}_{82}\mathrm{Pb}$: 235 = 4A + 207, odkiaľ máme A = 7,

92 = 2A – B + 82, odkiaľ máme B = 4.

$^{238}_{92}\mathrm{U} \to {}^{206}_{82}\mathrm{Pb}$: 238 = 4A + 206, odkiaľ A = 8,

92 = 2A – B + 82, odkiaľ B = 6.

b) Premena má dve možné formy

$$^{40}_{19}\mathrm{K} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e} \to {}^{40}_{18}\mathrm{Ar}\text{ , alebo } {}^{40}_{19}\mathrm{K} \to {}^{40}_{18}\mathrm{Ar} + {}^{0}_{+1}\mathrm{e} \qquad (1)$$

$$^{40}_{19}\mathrm{K} \to {}^{40}_{20}\mathrm{Ca} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e}\ . \qquad (2)$$

V prvom prípade (1) ide o záchyt elektrónu z elektrónového obalu alebo emisiu pozitrónu. Pozn.: ^{40}K sa považuje za najlepší prírodný zdroj pozitrónov.

V druhom prípade (2) ide o β^-–premenu sprevádzanú emisiou elektrónu.

c) Vo vzorke s hmotnosťou m_1 sa nachádza $m_{\mathrm{A}0} = p_3\, m_1$ izotopu ^{40}K. Keďže všetky izotopy majú rovnakú atómovú hmotnosť, sú pomery hmotností rovné pomerom počtu častíc.

$$m_\mathrm{Ar} = p_1\, p_3\, m_1\left(1 - \mathrm{e}^{-t_1 \ln 2/\tau_\mathrm{K}}\right) = p_1\, p_3\, m_1\left(1 - 2^{-t_1/\tau_\mathrm{K}}\right),$$

$$m_\mathrm{Ca} = p_2\, p_3\, m_1\left(1 - \mathrm{e}^{-t_1 \ln 2/\tau_\mathrm{K}}\right) = p_2\, p_3\, m_1\left(1 - 2^{-t_1/\tau_\mathrm{K}}\right).$$

Pre dané hodnoty $m_\mathrm{Ar} \approx 35{,}3$ ng, $m_\mathrm{Ca} \approx 280$ ng.

d) Začiatočná hmotnosť ^{40}K vo vzorke bola $m_{\mathrm{K}0}$. Za dobu t_2 zostal z pôvodného množstva zvyšok s hmotnosťou

$$m_{\mathrm{K}} = m_{\mathrm{K}0}\ \mathrm{e}^{-t_2 \ln 2/\tau_{\mathrm{K}}}\ .$$

Zvyšok s hmotnosťou $m_{\mathrm{K}0} - m_{\mathrm{K}}$ sú produkty Ar (p_1) a Ca (p_2). Hmotnosť vytvoreného argónu

$$m_{\mathrm{Ar}} = p_1\,(m_{\mathrm{K}0} - m_{\mathrm{K}}) = p_1\, m_{\mathrm{K}0}\left(1 - \mathrm{e}^{-t_2 \ln 2/\tau_{\mathrm{K}}}\right).$$

Z pomeru

$$\frac{m_{\mathrm{Ar}}}{m_{\mathrm{K}}} = p_1\left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-t_2 \ln 2/\tau_{\mathrm{K}}}}{\mathrm{e}^{-t_2 \ln 2/\tau_{\mathrm{K}}}}\right) = p_1\left(\mathrm{e}^{t_2 \ln 2/\tau_{\mathrm{K}}} - 1\right)$$

určíme dobu od poslednej vysokoteplotnej premeny horniny

$$t_2 = \frac{\tau_{\mathrm{K}}}{\ln 2}\ln\left(\frac{m_{\mathrm{Ar}}}{p_1\, m_{\mathrm{K}}} + 1\right).$$

Predané hodnoty $t_2 \approx 250$ mil. rokov.

58. ročník Fyzikálnej olympiády – ***Teoretické úlohy celoštátneho kola kategórie A***

Autori návrhov:	Ľubomír Konrád (1, 2, 4), Ivo Čáp (3)
Spracovanie návrhov:	Ivo Čáp
Recenzia a úprava:	Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha
Preklad textov do maďarčiny:	Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017