

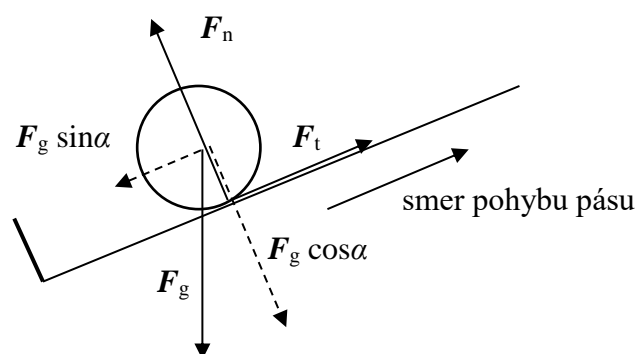
**58. ročník Fyzikálnej olympiády**  
**v školskom roku 2016/2017**  
**Kategória A – domáce kolo**  
*riešenie úloh<sup>1</sup>*

**1. Gul'ôčka na bežiacom pásu**

Riešenie:

a) Obrázok

1 b



Obr. RA-1

b) V smere rovnobežnom s pásom pôsobí na gul'ôčku nahor sila statického trenia  $F_t$  a nadol a zložka  $F_g = m g \sin \alpha$  tiažovej sily  $F_g$

$$m a = F_t - m g \sin \alpha, \quad (1)$$

Gul'ôčka sa bude otáčať pôsobením sily trenia  $F_t$ , takže okrem rovnosti (1) bude splnená pohybová rovnica otáčania (za kladný smer považujeme smer chodu hodinových ručičiek)

$$I \varepsilon = -F_t R. \quad (2)$$

Pri valivom pohybe bez prešmykovania gul'ôčky platí  $v = \omega R$ , resp.  $a = \varepsilon R$ .

Z rovností (1) a (2) potom máme silu statického trenia

$$F_t = \frac{2}{7} m g \sin \alpha.$$

Pre statické trenie platí podmienka  $F_t \leq f F_n = f m g \cos \alpha$ , a teda

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{7}{2} f. \quad (3) \quad 1 \text{ b}$$

Pri valivom pohybe je zrýchlenie hmotného stredu gul'ôčky, ak vychádzame z výrazu (2),

---

<sup>1</sup> Odporúčame preštudovať si podobné úlohy v publikácii  
 Čáp I., Konrád L.: Fyzika v zaujímavých riešených úlohách

$$a = a_v = -\frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I}{mR^2}} = -\frac{5}{7} g \sin \alpha. \quad (4) \quad 1 \text{ b}$$

- c) V smere rovnobežnom s pásom po dopade na pás pôsobia na guľôčku sila šmykového trenia nahor a zložka tiažovej sily nadol. Dosadením sily šmykového trenia

$$F_t = f m g \cos \alpha \quad (5)$$

do rovnosti (1) dostaneme zrýchlenie  $a$  postupného pohybu guľôčky po povrchu pásu smerom nahor

$$a = g \cos \alpha (f - \operatorname{tg} \alpha). \quad (6)$$

Guľôčka sa bude pohybovať smerom nahor iba ak  $a > 0$ , tzn.

$$\operatorname{tg} \alpha < f. \quad (7) \quad 2 \text{ b}$$

V opačnom prípade sa bude guľôčka šmýkať a zostane na dolnom konci pásu.

- d) Môžu nastať dva prípady podľa uhlu  $\alpha$  sklonu pásu.

Ak nie je splnená podmienka (7), zostane guľôčka pri dolnom okraji pásu, bude sa otáčať na mieste.

Ak je splnená podmienka (7) a súčasne je splnená aj podmienka (3), na začiatku sa bude guľôčka prešmykovať a postupne prejde na páse do valivého pohybu, ak je pás dostatočne dlhý.

Uvažujme druhý prípad.

Guľôčka sa pohybuje nahor so zrýchlením (6) a rýchlosť jej hmotného stredu je

$$v = at = t g \cos \alpha (f - \operatorname{tg} \alpha).$$

Pôsobením momentu sily trenia  $M = -R F_t$  sa guľôčka roztáča, pričom platí

$$I \varepsilon = M = -R f m g \cos \alpha.$$

Uhlová rýchlosť

$$\omega = \varepsilon t = -t \frac{R}{I} f m g \cos \alpha.$$

Bod dotyku guľôčky s pásom sa pohybuje rýchlosťou  $v_d = v - \omega R$ . Ak bod dosiahne rýchlosť  $v_0$  pásu, prestane sa guľôčka prešmykovať a prejde do valivého pohybu. Čas  $t_1$  prechodu od okamihu dopadu na pás do valivého pohybu určíme z rovnice

$$v_d = t_1 g \cos \alpha (f - \operatorname{tg} \alpha) + t_1 \frac{R^2}{I} f m g \cos \alpha = v_0,$$

odkiaľ máme

$$t_1 = \frac{v_0}{g} \frac{1}{\frac{7}{2} f \cos \alpha - \sin \alpha}.$$

Za tento čas nadobudne hmotný stred guľôčky rýchlosť

$$v_1 = v_0 \frac{f \cos \alpha - \sin \alpha}{\frac{7}{2} f \cos \alpha - \sin \alpha} < v_0$$

a prejde dráhu

$$d_1 = \frac{1}{2} v_1 t_1 = \frac{v_0^2}{2g} \frac{f \cos \alpha - \sin \alpha}{\left(\frac{7}{2} f \cos \alpha - \sin \alpha\right)^2}. \quad 1 \text{ b}$$

Ďalej pokračuje guľôčka už valivým pohybom so začiatočnou rýchlosťou  $v_1$  a so zrýchlením  $a$  (4) až do zastavenia, pričom prejde dráhu

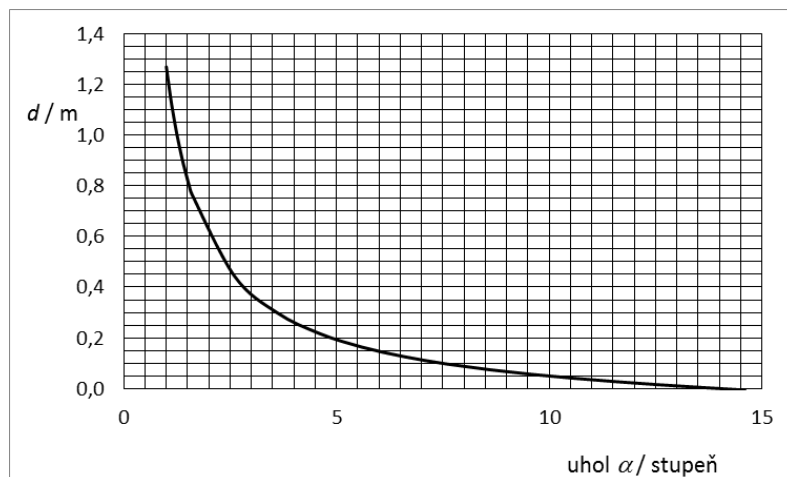
$$d_2 = -\frac{v_1^2}{2a_v} = \frac{7v_0^2}{10g \sin \alpha} \frac{(f \cos \alpha - \sin \alpha)^2}{\left(\frac{7}{2} f \cos \alpha - \sin \alpha\right)^2}. \quad 1 \text{ b}$$

Celková dráha až do zastavenia v najvyššom bode dráhy

$$d = d_1 + d_2 = \frac{v_0^2}{5g \sin \alpha} \frac{f \cos \alpha - \sin \alpha}{\frac{7}{2} f \cos \alpha - \sin \alpha}. \quad 1 \text{ b}$$

Pozn.: Možný je aj iný tvar výsledku.

e) Graf

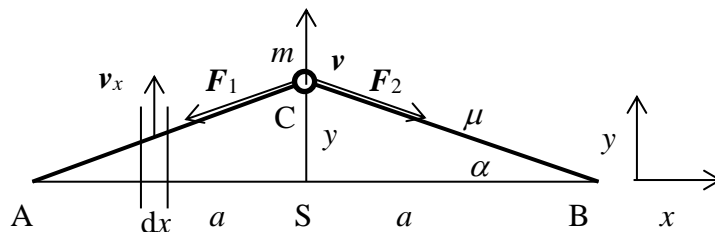


Z grafu určíme maximálny uhol sklonu  $\alpha_{\max} \approx 1,5^\circ$ .

## 2. Nanováhy

Riešenie:

a) Zjednodušený model



Obr. RA-2

Pri kmitavom pohybe sa zachováva mechanická energia sústavy. Potenciálna energia je daná deformáciou vlákna, kinetická energia pohybom vlákna a telieska.

Vlákno je na začiatku predĺžené, pričom  $a = a_0 (1 + \varepsilon)$ , a jeho deformačná energia

$$E_{p0} = \frac{1}{2} k (a - a_0)^2,$$

kde  $k$  je tuhosť vlákna daná Hookovým zákonom

$$\frac{F_0}{S} = E \frac{a - a_0}{a_0} = E \varepsilon, \text{ odkiaľ } k = \frac{F_0}{a - a_0} = \frac{S E}{a_0},$$

kde  $S$  je obsah prierezu vlákna,  $a_0$  pôvodná dĺžka nezaťaženého vlákna a  $\varepsilon a_0$  jeho začiatkové predĺženie.

Po vychýlení  $y$  telieska z polohy  $S$  je dĺžka vlákna

$$l = \sqrt{a^2 + y^2}$$

a deformačná energia

$$E_p = \frac{1}{2} k (l - a_0)^2.$$

Zmena potenciálnej energie oboch vlákien vyvolaná vychýlením telieska z rovnovážnej polohy

$$\Delta E_p = 2(E_p - E_{p0}) = 2 \left[ \frac{1}{2} k \left( \sqrt{a^2 + y^2} - a_0 \right)^2 - \frac{1}{2} k (a - a_0)^2 \right]$$

a po úprave

$$\Delta E_p = k \left[ (a^2 + y^2) - 2a_0 \sqrt{a^2 + y^2} - a^2 + 2a_0 a \right].$$

Pre malé výchylky nahradíme odmocninu podľa približného vzťahu pre  $y \ll a$

$$\sqrt{a^2 + y^2} = a \sqrt{1 + \left(\frac{y}{a}\right)^2} \approx a \left(1 + \frac{1}{2} \frac{y^2}{a^2}\right)$$

a máme

$$\Delta E_p = \frac{1}{2} \frac{S E}{a} \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon} y^2$$

$$\Delta E_p = k \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) y^2 = \frac{1}{2} k^* y^2.$$

2 b

Dostali sme kvadratickú funkciu s efektívnou tuhosťou sústavy

$$k^* = 2k \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) = 2k \left(1 - \frac{1}{1 + \varepsilon}\right) = \frac{S E}{a_0} \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon} = \frac{2\varepsilon S E}{a}.$$

Ak sa teliesko pohybuje rýchlosťou  $v = dy/dt$ , je jeho kinetická energia

$$E_{k1} = \frac{1}{2} m v^2.$$

Určíme kinetickú energiu  $E_{k2}$  vlákna.

Vlákno rozdelíme na malé úseky s dĺžkou  $dx$  (obr. A-2), ktoré sa pohybujú rýchlosťou

$$v_x = \frac{x}{a} v \text{ a majú kinetickú energiu } dE_{k2} = \frac{1}{2} dm v_x^2 = \frac{1}{2} \mu dx \frac{x^2}{a^2} v^2.$$

Celkovú kinetickú energiu vlákna získame integráciou tohto vzťahu

$$E_{k2} = 2 \int_0^a \frac{1}{2} \mu \frac{v^2}{a^2} x^2 dx = \mu \frac{v^2}{a^2} \frac{a^3}{3}. \quad 1 \text{ b}$$

Celková kinetická energia sústavy

$$E_{k1} = \frac{1}{2} m v^2 + \mu \frac{v^2}{a^2} \frac{a^3}{3} = \frac{1}{2} \left( m + \frac{2a}{3} \mu \right) v^2 = \frac{1}{2} m^* v^2. \quad 1 \text{ b}$$

Efektívna hmotnosť kmitavej sústavy  $m^* = m + \frac{2a}{3} \mu$ .

Frekvencia kmitov sústavy s efektívnou tuhosťou  $k^*$  a efektívnou hmotnosťou  $m^*$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{6SE\varepsilon}{a(3m+2a\mu)}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3\pi d^2 E\varepsilon}{2a(3m+2a\mu)}}. \quad 2 \text{ b}$$

- b) Pre kmity nanotrúbice podľa zjednodušeného modelu je podľa výsledného vzťahu pre  $m = 0$  a dané hodnoty veličín

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3\pi d^2 E\varepsilon}{l^2 \mu}} \approx 4,635 \text{ GHz}. \quad 0,5 \text{ b}$$

Ak uvažujeme zaťaženie nanotrúbice atómom xenónu ( $A_{r \text{Xe}} = 131,29 \text{ u} \approx 2,18 \times 10^{-25} \text{ kg}$ ), je frekvencia vlastných kmitov

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3\pi d^2 E\varepsilon}{l(3m+l\mu)}} \approx 4,633 \text{ GHz}. \quad 0,5 \text{ b}$$

Rozdiel je badateľný až pre štvrtú platnú číslicu. 0,5 b

Presnejšie rozdiel posúdime podľa relatívnej zmeny frekvencie vplyvom zachyteného atómu Xe

$$\delta f = \frac{f - f_0}{f_0} = \frac{f}{f_0} - 1 = \sqrt{\frac{l\mu}{3m+l\mu}} - 1. \quad 2 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty  $\delta f \approx -3,3 \times 10^{-4}$ . 0,5 b

Pri relatívnej presnosti merania frekvencie 1 ppm ( $10^{-6}$  – parts per million) by bolo možné identifikovať časticu s hmotnosťou o dva rády menšou, tzn. jednotlivý protón (jadro vodíka).

### 3. JETLEV - Flyer

Riešenie:

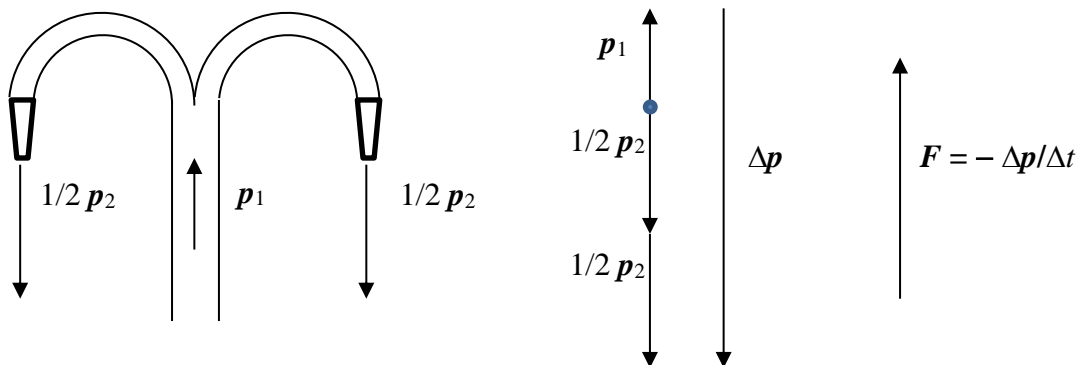
- a) V ohybe trúbic JETLEV na chrbte človeka dochádza k zmene hybnosti vody na opačnú. Rozdiel vektorov hybnosti je rovný impulzu sily, ktorá v tomto prípade pôsobí smerom nahor. Aby sa zosilnil účinok vodného prúdu, sú hadice zakončené dýzami (zúžením)

a tým sa výrazne zvýši rýchlosť (a teda aj hybnosť) vody striekajúcej nadol. Takto vyvolaná sila vynesie človeka aj so zariadením JETLEV a hadicou nahor. 1 b

Pre fyzikálny výpočet budeme predpokladať, že v hadiciach a potrubiach ide o ustálené prúdenie vody. Základné vzťahy, ktoré v tom prípade platia, sú rovnica spojitosti toku a Bernoulliho rovnica.

Obrázok RA-3

0,5 b



Obr. RA-3

- b) Ak je vstupná hadica čerpadla na úrovni rozľahlej hladiny, pre nasávanú vodu platí rovnosť

$$p_a = \frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1, \quad (1)$$

kde  $p_a$  je atmosférický tlak na hladine,  $v_1$  rýchlosť vody vo vstupnom otvore hadice a  $p_1$  tlak vo vstupnej hadici. Za čerpadlom je tlak vody  $p_2$  a vzhľadom na rovnaký priemer hadíc, rýchlosť vody je  $v_1$ . Vo výstupnom otvore dýzy je tlak  $p_a$  a rýchlosť  $v_2$  a platí

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_a. \quad (2)$$

Výkon čerpadla pre rovnaký priemer vstupného a výstupného otvoru

$$P = F_2 v_2 - F_1 v_1 = p_2 S_2 v_2 - p_1 S_1 v_1 = Q_V (p_2 - p_1).$$

Pomocou rovnice kontinuity

$$Q_V = S_1 v_1 = S_2 v_2$$

a rovností (1) a (2) môžeme písať

$$p_2 - p_a = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left( \frac{d_1^4}{d_2^4} - 1 \right) \quad \text{a} \quad p_a - p_1 = \frac{1}{2} \rho v_1^2, \quad (3)$$

Z výrazov (3) určíme rozdiel tlakov medzi vstupom a výstupom čerpadla

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \frac{d_1^4}{d_2^4} = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{4 Q_V}{\pi d_2^2} \right)^2 \quad 1 b$$

a výkon čerpadla za týchto podmienok

$$P = Q_V (p_2 - p_1) = \frac{8}{\pi^2 d_2^4} \rho Q_V^3. \quad \text{Pre dané hodnoty } P \approx 19,7 \text{ kW}. \quad 0,5 b.$$

V dýze dochádza k zrýchleniu prúdenia a teda zmene hybnosti. Na striekačku s dýzou pôsobí sila reakcie

$$F = \frac{dm}{dt} (v_2 - v_1) = \rho Q_V \left( \frac{d_1^2}{d_2^2} - 1 \right) \frac{4Q_V}{\pi d_1^2} = \frac{4\rho}{\pi} \left( \frac{1}{d_2^2} - \frac{1}{d_1^2} \right) Q_V^2. \quad 2 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty  $F \approx 1,29 \text{ kN}$ .

0,5 b.

*Pozn.: Takúto reakciu pôsobiacu na dýzu striekačky nie je možno udržať v rukách človeka, a preto tieto striekačky sú pevne nainštalované na požiarnických autách.*

- c) Situácia je podobná ako v časti b) s tým rozdielom, že pritekajúca voda a tryskajúca voda majú opačný smer a dýzy na JETLEV sú dve. Reakčná sila smerom nahor

$$F = \frac{dm}{dt} (v_2 + v_1) = \rho Q_V \left( \frac{d_1^2}{2d_2^2} + 1 \right) \frac{4Q_V}{\pi d_1^2} = \frac{4\rho}{\pi} \left( \frac{1}{2d_2^2} + \frac{1}{d_1^2} \right) Q_V^2. \quad 1 \text{ b}$$

Z tejto rovnice určíme potrebný prietok  $Q_V$  vody

$$Q_V = \sqrt{\frac{\pi F}{4\rho \left( \frac{1}{2d_2^2} + \frac{1}{d_1^2} \right)}}. \quad (4)$$

Táto sila  $F$  je v rovnováhe s tiažovou silou človeka so zariadením a hadice plnej vody

$$F = mg + \mu h g + S_1 h \rho g. \quad (5) \quad 1 \text{ b}$$

Voda sa nasáva pod skútom, vo vstupnom potrubí čerpadla je tlak  $p_1$  a rýchlosť prúdenia vody  $v_1$ , potom pre prúdenie vody vo vstupnom potrubí platí

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 = p_a. \quad (6)$$

Na výstupe čerpadla je tlak vody  $p_2$  a rýchlosť prúdenia vody  $v_1$ . Na výstupe dýzy vo výške  $h$  je rýchlosť prúdenia vody  $v_2$  a v otvorenom ústí oboch dýz tlak  $p_a$ . Platí

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h + p_a. \quad (7)$$

Výkon  $P$  čerpadla

$$P = Q_V (p_2 - p_1) = Q_V \left( \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h \right) = Q_V \left[ \frac{1}{2} \rho \left( \frac{Q_V}{2S_2} \right)^2 + \rho g h \right], \quad 1 \text{ b}$$

kde rozdiel tlakov  $p_2 - p_1$  sme vyjadrili odčítaním rovností (7) a (6).

Po dosadení (4) a (5) do výrazu pre výkon  $P$  čerpadla máme hľadaný výsledok

$$P = g \sqrt{\frac{g(m + \mu h + S_1 h \rho)}{\rho \left( \frac{1}{2S_2} + \frac{1}{S_1} \right)}} \left[ \frac{(m + \mu h + S_1 h \rho)}{8S_2^2 \left( \frac{1}{2S_2} + \frac{1}{S_1} \right)} + \rho h \right]. \quad 1 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty  $P \approx 42 \text{ kW}$ .

0,5 b

*Pozn.: Najvýkonnejšie skútre majú výkon až 140 kW a na vodnej hladine dosahujú rýchlosť až 100 km/h.*

#### 4. Elektrický filter

Riešenie:

a) Vstupná impedancia

$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C} + \frac{R(R+j\omega L)}{2R+j\omega L} = \frac{2 - \omega^2 CL + j\omega\left(\frac{L}{R} + CR\right)}{j\omega CR\left(2 + j\omega\frac{L}{R}\right)} R \quad 1 \text{ b}$$

$$U_2 = U_1 - j\omega L I_L = U_1 - j\omega L \frac{U_1}{Z_1} \frac{R}{2R+j\omega L} = U_1 \frac{2 + j\omega\left(\frac{L}{R} + CR\right)}{2 - \omega^2 CL + j\omega\left(\frac{L}{R} + CR\right)}, \quad 1 \text{ b}$$

Pozn.: Keďže je filter na výstupe naprázdno (bez pripojenej záťaže), vstupný prúd

$I_1 = \frac{U_1}{Z_1}$  sa delí medzi vetvu s rezistorom  $R$  a paralelnú vetvu s induktorom  $L$

a rezistorom  $R$ . Ide o delič prúdu, pričom prúd vetvou s induktorom  $I_L = I_1 \frac{R}{2R+j\omega L}$ .

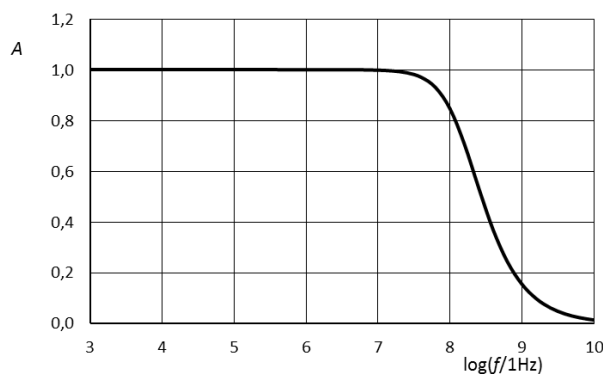
Komplexný napät'ový prenos

$$A = \frac{2 + j\omega\left(\frac{L}{R} + CR\right)}{2 - \omega^2 CL + j\omega\left(\frac{L}{R} + CR\right)} \quad \text{a} \quad 1 \text{ b}$$

$$|A| = \frac{\sqrt{4 + \omega^2\left(\frac{L}{R} + CR\right)^2}}{\sqrt{\left(2 - \omega^2 CL\right)^2 + \omega^2\left(\frac{L}{R} + CR\right)^2}}. \quad (1) \quad 1 \text{ b}$$

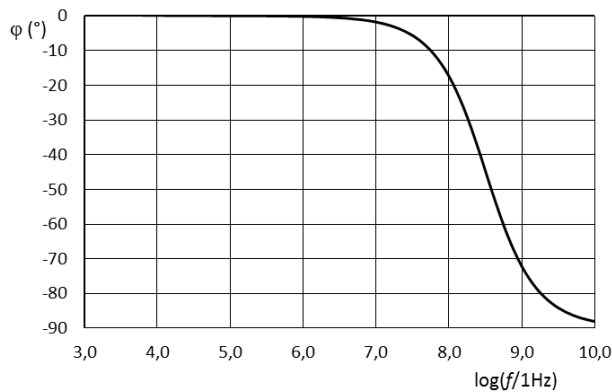
$$\varphi = \text{arctg}\left[\frac{\omega}{2}\left(\frac{L}{R} + CR\right)\right] - \text{arctg}\left[\frac{\omega}{2 - \omega^2 CL}\left(\frac{L}{R} + CR\right)\right]. \quad 1 \text{ b}$$

b) Grafy (vytvorené v tabuľkovom editore EXCEL)



Obr. RA-4  
\_ b





Obr. RA-5

2 b

Pozn: Keďže druhý výraz vo vzťahu pre  $\varphi$  mení pri frekvencii  $\omega_r = \sqrt{2/LC}$  znamienko a EXCEL udáva funkčné hodnoty iba v rozsahu  $-\pi/2$  až  $\pi/2$  (hlavná veta funkcie), je pre  $\omega > \omega_r$  potrebné pre zachovanie spojitosti použiť druhú vetvu funkcie pripočítaním hodnoty  $\pi$  ( $\pi$  je perióda funkcie  $\tan\varphi$ ).

- c) Medzná frekvencia sa určuje na úrovni  $1/2 = 0,5$  poklesu výkonového prenosu alebo  $1/\sqrt{2} \approx 0,707$  napät'ového prenosu. Zo vzťahu (1) tak máme podmienku

$$|A| = \sqrt{\frac{4 + \omega^2 \left(\frac{L}{R} + CR\right)^2}{\left(2 - \omega^2 CL\right)^2 + \omega^2 \left(\frac{L}{R} + CR\right)^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

ktorú upravíme na tvar kvadratickej rovnice pre  $\omega^2$

$$\omega^4 - 2\omega^2 \left[ \frac{2}{CL} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{RC} + \frac{R}{L} \right)^2 \right] - \left( \frac{2}{CL} \right)^2 = 0.$$

Jej riešenie pre  $\omega^2 > 0$

$$\omega^2 = \left[ \frac{2}{CL} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{RC} + \frac{R}{L} \right)^2 \right] + \sqrt{\left[ \frac{2}{CL} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{RC} + \frac{R}{L} \right)^2 \right]^2 + \left( \frac{2}{CL} \right)^2},$$

a teda medzná frekvencia

$$f_m = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left[ \frac{2}{CL} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{RC} + \frac{R}{L} \right)^2 \right] + \sqrt{\left[ \frac{2}{CL} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{RC} + \frac{R}{L} \right)^2 \right]^2 + \left( \frac{2}{CL} \right)^2}}.$$

Pre dané hodnoty  $f_m \approx 159$  MHz.

1 b

Tvrdenie o zmene fázy z  $0^\circ$  na  $180^\circ$  nezodpovedá skutočnosti, tzn. spomínaný prechod ani frekvencia  $f_{m2}$  neexistujú.

## 5. Umelé slnko

Riešenie:

- a) Aby sa striedali deň–noc v 24 hodinovom cykle, musel by Helios obiehať v smere otáčania Zeme dvojnásobnou uhlovou rýchlosťou, tzn. s periódou  $t_H = 12$  h. Keby obiehal v opačnom smere, musel by Zem obehnúť za  $t_Z = 365,25$  dňa (ako relatívny obeh Slnka) vo vzdialenosti Zem–Slnko, čo je nereálne. 0,5 b

Aby vznikli pomery podobné ročným obdobiam, musel by Helios obiehať okolo Zeme v rovine ekliptiky. Keďže by obehol okolo Zeme vzhľadom na Zem za 24 hod., bol by slnovrat vždy iba na rovnakom poludníku. 0,5 b

Aby sa striedali ročné obdobia, musel by rozdiel otáčok Zeme a Heliosu mať hodnotu  $1/(12 \text{ h}) + 1/(365,25 \text{ dňa})$ . V takom prípade by Helios „obehol“ Zem raz za rok. Ročné obdobia by sa tak striedali nie podľa zemepisnej šírky ale podľa zemepisnej dĺžky. 0,5 b

Aby sa udržali rovnaké podmienky pre živé bytosti a rastliny, muselo by mať žiarenie prichádzajúce z Heliosu rovnaké spektrálne zloženie ako zo Slnka. To závisí od povrchovej teploty telesa. Teplota povrchu Heliosu by musela byť  $T_H \approx 6000$  K. 0,5 b

Slapové sily sú dôsledkom gravitácie a rotácie sústavy Zem–Helios okolo spoločného hmotného stredu. Ak by mali byť rovnaké od Heliosu ako od Slnka, musela by byť gravitačná sila Heliosu na privrátenej a odvrátenej strane Zeme rovnaká ako od Slnka a odstredivá sila v dôsledku rotácie sústavy Zem–Helios na privrátenej a odvrátenej strane Zeme ako v sústave Zem–Slnko.

To by sa dalo splniť pri určitej hodnote hmotnosti Heliosu. 0,5 b

- b) Ako bolo uvedené v časti a), pre zachovanie zloženie spektra žiarenia je potrebná teplota povrchu Heliosu  $T_H = 6000$  K. 0,5 b

Helios by obiehal okolo Zeme po kružnicovej trajektórii v rovine ekliptiky. Z rovnosti gravitačnej sily a zotrvačnej (odstredivej) sily máme

$$G \frac{M_H M_Z}{r_H^2} = M_H \left( \frac{2\pi}{t_H} \right)^2 r_H,$$

odkiaľ

$$r_H = \sqrt[3]{G \frac{M_Z t_H^2}{4\pi^2}}. \text{ Pre dané hodnoty } r_H \approx 2,66 \times 10^7 \text{ m.} \quad 1 \text{ b}$$

Ak považujeme Helios za dokonale čierne teleso, je vyžiarený výkon Heliosu

$$P_H = 4\pi R_H^2 \sigma T_H^4.$$

Plošná hustota žiarivého toku vo vzdialenosti  $r_H$  Zeme

$$H_Z = \frac{P_H}{4\pi r_H^2}.$$

Keďže by bol Helios pomerne blízko k Zemi ( $R_Z \approx 6,38 \times 10^6$  m), nemožno lúče od Heliosu považovať za rovnobežné. Zo stredu Heliosu vidno polomer Zeme pod uhlom

$$\varphi_Z \arcsin \frac{R_Z}{r_H} \approx 14^\circ.$$

To predstavuje priestorový uhol

1 b

$$\omega_Z = 2\pi(1 - \cos \varphi_Z) = 2\pi \left(1 - \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_Z}\right) = 2\pi \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{R_Z}{r_H}\right)^2}\right).$$

Výkon žiarenia Heliosu dopadajúci na povrch Zeme

$$P_Z = \frac{P_H}{4\pi} \omega_Z.$$

Aby sa zachovala energetická rovnováha Zeme, musí byť tento výkon rovný výkonu Slnka zachytenému Zemou

$$P_{ZS} = \frac{4\pi R_S^2 \sigma T_S^4}{4\pi r_{ZS}^2} \pi R_Z^2.$$

Z uvedených vzťahov dostaneme po úprave (pre  $T_S = T_H$ ) požadovaný polomer Heliosu

$$R_H = \frac{1}{\sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{R_Z}{r_H}\right)^2}}} \frac{R_Z}{\sqrt{2} r_{ZS}} R_S. \text{ Pre dané hodnoty } R_H \approx 123 \text{ km.} \quad 1 \text{ b}$$

*Pozn.:*

Vyžiarený výkon Heliosu  $P_H = 4\pi R_H^2 \sigma T_H^4$  pre vypočítané hodnoty  $P_H \approx 1,40 \times 10^{19} \text{ W}$ .

Aby veľkosť slapových síl vyvolaných gravitačným poľom Heliosu bola približne rovnaká, aké vyvoláva Slnko, musia byť rozdiely medzi gravitačnou silou na privrátenej a odvrátenej strane Zeme v oboch prípadoch rovnaké

$$G \frac{M_S}{(r_{ZS} - R_Z)^2} - G \frac{M_S}{(r_{ZS} + R_Z)^2} = G \frac{M_H}{(r_H - R_Z)^2} - G \frac{M_H}{(r_H + R_Z)^2},$$

z čoho pre hmotnosť Heliosu máme

$$M_H = M_S \frac{r_{ZS}}{r_H} \frac{(r_H^2 - R_Z^2)^2}{(r_{ZS}^2 - R_Z^2)^2} \approx M_S \frac{(r_H^2 - R_Z^2)^2}{r_H r_{ZS}^3}.$$

Pre dané hodnoty  $M_H \approx 9,86 \times 10^{18} \text{ kg}$ .

1 b

Porovnáme ešte slapové sily vyvolané rotáciou sústavy telies.

Hmotný stred sústavy Zem–Helios je vo vzdialenosti od stredu Zeme

$$r_T = r_H \frac{M_H}{M_H + M_Z} \approx r_H \frac{M_H}{M_Z}.$$

Stred Zeme sa pohybuje po kružnici s polomerom  $r_T$  s periódou  $t_H$ .

Podmienka rovnosti rozdielu odstredivých síl na odvrátenej a privrátenej strane Zeme v sústave Z–H a Z–S

$$m \frac{4\pi^2}{t_H^2} (R_Z + r_T) - m \frac{4\pi^2}{t_H^2} (R_Z - r_T) = m \frac{4\pi^2}{t_Z^2} (r_{ZS} + R_Z) - m \frac{4\pi^2}{t_Z^2} (r_{ZS} - R_Z).$$

Po úprave a dosadení máme

$$r_T = \frac{t_H^2}{t_Z^2} R_Z = r_H \frac{M_H}{M_Z}, \text{ resp. } M_H = M_Z \frac{t_H^2}{t_Z^2} \frac{R_Z}{r_H}.$$

Pre dané a vypočítané hodnoty  $M_H \approx 2,7 \times 10^{18}$  kg. 1 b

Ako vidno, rovnosť slapových síl spôsobených gravitáciou a odstredivou silou nemožno splniť súčasne, ale hodnoty hmotnosti získané z obidvoch úvah majú rovnaký poriadok a líšia sa iba v pomere 1:4.

*Pozn.: Pre porovnanie hmotnosť Mesiaca je  $7,35 \cdot 10^{22}$  kg a jeho vzdialenosť od Zeme  $3,84 \times 10^8$  m.*

Stredná hustota Heliosu by bola pre oba prípady

$$\rho_H = \frac{M_H}{(4/3)\pi R_H^3}.$$

Pre dané hodnoty  $\rho_H \approx 1,26 \times 10^3$  kg·m<sup>-3</sup>, resp.  $0,35 \times 10^3$  kg·m<sup>-3</sup>. 1 b

*Pozn.: Pre porovnanie stredná hustota Slnka  $\rho_S \approx 1,41 \times 10^3$  kg·m<sup>-3</sup>.*

- c) Najvýraznejším znakom umelého Slnka by bolo to, že Helios by vychádzal na západe a zapadal na východe (kým hviezdy aj Mesiac budú stále vychádzať na východe a zapadať na západe).

Druhým znakom, ktorý by vyžadoval cestovanie, je to, že ročné obdobia sa nestrádzajú po rovnobežkách ale po poludníkoch.

Priemer Heliosu by bolo vidno zo Zeme pod uhlom približne 32 uhlových minút. Slnko a Mesiac vidno pod rovnakým uhlom, tzn. podľa zdanlivej veľkosti na oblohe by sme Helios od Slnka nerozlíšili. 0,5 b

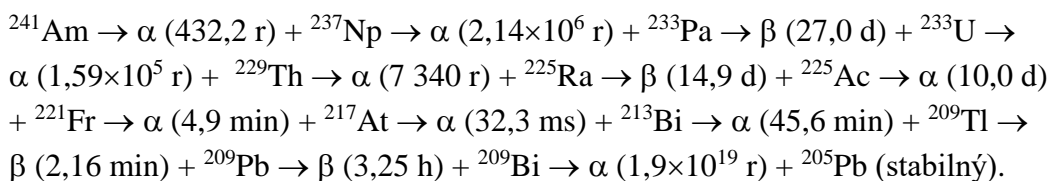
- d) Modelovo by teleso uvedených vlastností mohlo existovať, hodnoty sú reálne. Druhou otázkou je, ako by sa mohlo v prípade potreby vytvoriť. Ďalší problém je, že teleso s určenými vlastnosťami by nebolo schopné trvalo dodávať energiu formou žiarenia - v strede by nebol dostatočný tlak a dostatočná teplota na začatie a udržanie termojadrovej reakcie. 0,5 b

## 6. Americium <sup>241</sup>Am

*Riešenie:*

- a) Rovnica premeny <sup>241</sup>Am → <sup>237</sup>Np + 4α + γ

Jadro <sup>237</sup>Np je prvým členom neptúniového rozpadového radu:



Značkou  $r$  sa označuje počet rokov.

1 b

Za stabilný sa považuje už  $^{209}\text{Bi}$  (polčas premeny podstatne dlhší ako vek Zeme  $4,7 \times 10^9$  rokov).

- b) Jadrá s vysokým nukleónovým číslom vznikali vo Vesmíre najmä pri výbuchu supernovy a stali sa súčasťou kozmického prachu, z ktorého sa vytvárala Slnečná sústava a Zem. V zemskej kôre sa tak nachádzali nestabilné prvky ako  $^{238}\text{U}$ ,  $^{235}\text{U}$ ,  $^{232}\text{Th}$ ,  $^{237}\text{Np}$ , ktoré sa postupne menili na jednoduchšie až na stabilný produkt. Pre jednotlivé premeny sú podstatné ich polčasy. Ak je polčas premeny podstatne dlhší ako vek Zeme, môže sa príslušný izotop v prírode prirodzene vyskytovať. Keďže polčasy premeny sú:  $^{232}\text{Th} - 1,39 \times 10^{10}$  r,  $^{238}\text{U} - 4,51 \times 10^9$  r,  $^{235}\text{U} - 7,07 \times 10^8$  r,  $^{237}\text{Np} - 2,25 \times 10^6$  r, pričom vek Zeme je približne 4,7 mld r. Ak aj bolo pri vzniku Zeme v zemskej kôre neptúnium, muselo sa prakticky bez zvyšku rozpadnúť, preto sa v prírode nevyskytuje.
- c) Pri jadrovej premene sa mení pokojová hmotnosť zložiek  $\Delta m$ , ktorá súvisí so zmenou pokojovej energie

$$\Delta E = (m_{\text{Am}} - m_{\text{Np}} - m_{\alpha})c^2.$$

Pre hodnoty veličín  $\Delta E \approx 1,069 \times 10^{-12}$  J  $\approx 6,67$  MeV.

2 b

Časť tejto energie sa uvoľní vo forme fotónu s energiou

$$E_{\gamma} = \frac{hc}{\lambda}.$$

Pre dané hodnoty  $E_{\gamma} \approx 59,6$  keV, čo je 0,89 % uvoľnenej energie, a teda ju v ďalšom hodnotení zložiek energie nebudeme uvažovať.

Uvoľnená energia  $\Delta E$  tak predstavuje prevažne kinetickú energiu jadra Np a častice  $\alpha$ .

Vzhľadom na veľký pomer hmotností Np a častice  $\alpha$ , získa podstatnú časť kinetickej energie častica  $\alpha$ . Urobíme rádoový odhad hybnosti  $p_{\alpha} = \sqrt{2m_{\alpha} E_k} \approx 1,2 \times 10^{-19}$  kg·m·s<sup>-1</sup>.

Hybnosť fotónu  $p_{\gamma} = h/\lambda \approx 3,2 \times 10^{-23}$  kg·m·s<sup>-1</sup>. Vidíme, že hybnosť fotónu je v celkovej bilancii zanedbateľne malá a v ďalšom rozbere ju netreba uvažovať.

Podľa ZZH  $p_{\alpha} \approx p_{\text{Np}}$  a celková kinetická energia

$$\Delta E \approx E_k = \frac{p_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} + \frac{p_{\text{Np}}^2}{2m_{\text{Np}}} = E_{k\alpha} \left( 1 + \frac{m_{\alpha}}{m_{\text{Np}}} \right).$$

Kinetická energia  $\alpha$  častice

$$E_{k\alpha} \approx \frac{\Delta E}{1 + \frac{m_{\alpha}}{m_{\text{Np}}}}.$$

1 b

Pre dané hodnoty  $E_{k\alpha} \approx 6,56$  MeV, tzn. 98,35 %  $\Delta E$ .

0,5 b

$$E_{k\text{Np}} \approx \frac{p_{\text{Np}}^2}{2m_{\text{Np}}} = \frac{p_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} \frac{m_{\alpha}}{m_{\text{Np}}} = \frac{\Delta E}{1 + \frac{m_{\text{Np}}}{m_{\alpha}}}.$$

1 b

Pre dané hodnoty  $E_{k\text{Np}} \approx 0,11$  MeV, tzn. 1,65 %  $\Delta E$ .

0,5 b

d) Aktivita náplne

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t}, \text{ kde } \lambda_1 = \frac{\ln 2}{T_1}, T_1 \text{ je polčas premeny } {}^{241}\text{Am}.$$

Každé premenené jadro uvoľní energiu  $\Delta E$ . Získaný tepelný výkon

$$P = \Delta E A.$$

Počet atómov

$$N = \frac{M}{M_m} N_A.$$

Hmotnosť náplne  ${}^{241}\text{Am}$  pre zabezpečenie daného tepelného výkonu

$$M = \frac{M_m}{N_A \Delta E} \frac{P T_1}{\ln 2}. \text{ Pre dané hodnoty } M = 36,8 \text{ kg.} \quad 1 \text{ b}$$

e) Jadrá  ${}^{241}\text{Am}$  sa s polčasom  $T_1$  menia na jadrá  ${}^{237}\text{Np}$  a tie sa len veľmi pomaly menia s polčasom  $T_2 = 2,14 \times 10^6$  r na jadrá  ${}^{231}\text{Pa}$ . Za čas  $\tau \ll T_1$  počet jadier  ${}^{237}\text{Np}$  s časom lineárne narastá

$$N_2(t) = A_1 t.$$

Vzhľadom na malý počet  $N_2$  a dlhý polčas  $T_2$  je aktivita  $\alpha$  jadier  ${}^{237}\text{Np}$  zanedbateľne malá v porovnaní s aktivitou  $\alpha$  jadier  ${}^{241}\text{Am}$ . Za dobu  $\tau$  vznikne  $A_1 \tau$ . Tieto jadrá sa s polčasom  $T_3$  menia na  ${}^{233}\text{Pa}$  a v čase  $\tau$  je aktivita  $\alpha$  jadier  ${}^{237}\text{Np}$

$$A_2 = A_1 \tau \lambda_2.$$

S ohľadom na krátky polčas  $T_3 = 27,0$  d  $\ll \tau$  sa jadrá  ${}^{233}\text{Pa}$  takmer okamžite menia premenou  $\beta$  na  ${}^{233}\text{U}$ . Aktivita  $\beta$  je tak prakticky rovná aktivite  $\alpha$  jadier  ${}^{237}\text{Np}$ . V čase  $\tau$

$$A_\beta = A_1 \tau \lambda_2 = \frac{\ln 2}{T_1} \frac{\ln 2}{T_2} \frac{M}{M_m} N_A \tau. \quad 1 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty  $A_\beta \approx 3,03 \times 10^{10}$  Bq.

Vzhľadom na malý počet jadier a veľký polčas  ${}^{233}\text{U}$  je aktivita  $\alpha$  náplne  ${}^{233}\text{U}$  a nasledujúcich produktov rozpadového radu zanedbateľne malá v porovnaní s aktivitou  $\alpha$  náplne  ${}^{241}\text{Am}$ .

Aktivita  $\alpha$  náplne generátora v čase  $\tau$

$$A_\alpha = A_1 e^{-\lambda_1 \tau} \lambda_1 = \frac{\ln 2}{T_1} \frac{M}{M_m} N_A e^{-\frac{\ln 2}{T_1} \tau} \approx \frac{\ln 2}{T_1} \frac{M}{M_m} N_A \left( 1 - \frac{\ln 2}{T_1} \tau \right). \quad 1 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty  $A_\alpha \approx 4,52 \times 10^{15}$  Bq.

Z výsledkov je zrejmé, že aktivita  $\alpha$  náplne  ${}^{241}\text{Am}$ , a tým aj tepelný výkon  $P$  zdroja exponenciálne klesá s polčasom  $T_1$  (pre  $\tau \ll T_1$  je tento pokles prakticky lineárny), tzn. za čas  $T_1$  poklesne výkon na polovičný. Zároveň sa náplň zdroja stáva  $\beta$  žiaričom a aktivita  $\beta$  s časom narastá. Zostáva však na veľmi nízkej úrovni, takže ohrozenie prenikavejším žiarením  $\beta$  je veľmi nízke.

## 7. Vyšetrovanie interferencie vlnenia – experimentálna úloha

Poznámka k riešeniu:

Ak je  $L \gg d$ , možno považovať akustické lúče medzi reproduktormi a mikrofónom za rovnobežné. Pre posunutie mikrofónu  $x$  je uhol vychýlenia lúčov od osi sústavy  $\varphi$ , pričom

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{L}.$$

Rozdiel dĺžky lúčov medzi reproduktormi a mikrofónom

$$\delta = d \sin \varphi = d \frac{x}{\sqrt{L^2 + x^2}}.$$

Podmienka interferenčného maxima je  $\delta = k \lambda$ , kde  $k = 1, 2, \dots$  a vlnová dĺžka

$$\lambda = \frac{c}{f}, \quad c \text{ je rýchlosť zvuku vo vzduchu v miestnosti.}$$

Z podmienky maxima

$$\delta = d \frac{x_{\max}}{\sqrt{L^2 + x_{\max}^2}} = k \frac{c}{f}$$

dostaneme

$$c = \frac{f d}{k} \frac{x_{\max}}{\sqrt{L^2 + x_{\max}^2}}.$$

Podobne z podmienky minima  $\delta = (2k + 1) (\lambda/2)$

$$\delta = d \frac{x_{\min}}{\sqrt{L^2 + x_{\min}^2}} = \frac{2k + 1}{2} \frac{c}{f}$$

dostaneme

$$c = \frac{2 f d}{2k + 1} \frac{x_{\min}}{\sqrt{L^2 + x_{\min}^2}}.$$

---

### 58. ročník Fyzikálnej olympiády – Úlohy domáceho kola kategórie A

Autori úloh: Ivo Čáp (1, 2, 3, 4, 6), Aba Teleki, (5), Ľubomír Mucha (7)

Recenzia a úprava: Daniel Klivanec, Ľubomír Mucha

Redakcia: Ivo Čáp

Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016