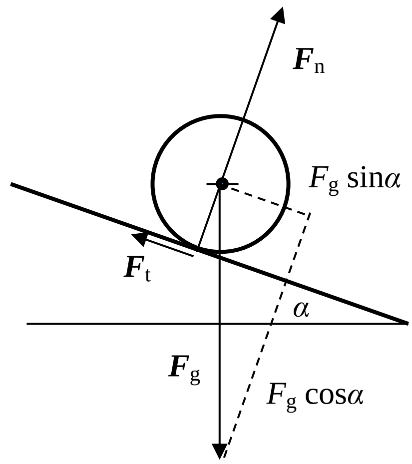
58. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2016/2017
Kategória A – krajské kolo
riešenie úloh

1. *Guľôčka na strieške KB*

Riešenie:

a) Obrázok RA2–1 s tromi pôsobiacimi silami $\boldsymbol{F}_{\mathrm{g}}$ (tiažová), $\boldsymbol{F}_{\mathrm{n}}$ (tlaková sila podložky), $\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}}$ (sila trenia).



Obr. RA2–1 2 b

Pre rovnováhu síl v smere kolmom na povrch strechy

$$F_{\mathrm{n}} = F_{\mathrm{g}}\cos\alpha = m\,g\cos\alpha\,. \qquad (1)$$

Pohybová rovnica postupného pohybu v smere rovnobežnom s povrchom strechy

$$m\,a = F_{\mathrm{g}}\sin\alpha - F_{\mathrm{t}} = m\,g\sin\alpha - F_{\mathrm{t}}\,. \qquad (2)$$

Pohybová rovnica otáčavého pohybu guľôčky okolo osi prechádzajúcej jej stredom

$$I\,\varepsilon = F_{\mathrm{t}}\,r\,. \qquad (3)$$

Ak sa guľa neprešmykuje, a teda sa pohybuje valivým pohybom, platí

$$a = r\,\varepsilon \qquad \text{a} \qquad F_{\mathrm{t}} \le f\,F_{\mathrm{n}}\,. \qquad (4)$$

Dosadením do pohybových rovníc a po úprave máme

$$F_{\mathrm{t}} = \frac{2}{7}m\,g\sin\alpha \le f\,m\,g\cos\alpha\,,\ \text{resp.} \qquad \tan\alpha = \frac{H}{\sqrt{L^2 - H^2}} \le \frac{7}{2}f\,,$$

odkiaľ

$$\frac{H}{L} \le \frac{f}{\sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2 + f^2}}\,.\ \text{Pre dané hodnoty}\ \frac{H}{L} \le 0{,}66, \qquad 2\text{ b}$$

čo je podmienka, aby sa guľôčka po streche valila bez prešmykovania.

Pre $H_1/L = 0{,}55$ – guľôčka sa pohybuje valivým pohybom,

pre $H_2/L = 0{,}77$ – guľôčka sa bude šmýkať.

b) Rýchlosť v_0 závisí od spôsobu pohybu guľôčky po streche.

Ak je pohyb guľôčky valivý (bez prešmykovania), určíme zrýchlenie a z rovníc (2) a (3)

$$a = \frac{5}{7}g\sin\alpha\,,\ \text{kde}\ \sin\alpha = \frac{H}{L}$$

Po prejdení dráhy L získa guľôčka rýchlosť

$$v_0 = \sqrt{2La} = \sqrt{\frac{10}{7}Hg}$$. Pre $H = H_1$ máme $v_{01} \approx 2{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. 1 b

Pozn.: Možno využiť aj zákon zachovania mechanickej energie

$$mgH = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{2}{5}m\right)v_0^2 = \frac{7}{10}mv_0^2 .$$

Ak sa guľôčka pohybuje šmýkaním, tzn. bez valivého pohybu, sila šmykového trenia $F_t = f F_n$ a zrýchlenie

$$a = g\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right).$$

Rýchlosť na dolnom konci strechy

$$v_0 = \sqrt{2aL} = \sqrt{2gL\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right)} = \sqrt{2gH\left(1 - f\,\frac{\sqrt{L^2 - H^2}}{H}\right)} .$$ 2 b

Pre $H = H_2$ máme $v_{02} \approx 3{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

c) Ide o šikmý vrh nadol z dolného kraja strechy so začiatočnou rýchlosťou v_0 a uhlom $-\alpha$ (pričom $\sin\alpha = H/L$).

Pohybové rovnice guľôčky vzhľadom na dolný okraj strechy v súradnicovej sústave (x, y) sú

$$x = v_0 t\cos\alpha \qquad y = -v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 .$$

Pre bod dopadu platí

$$y = -v_0 t_d \sin\alpha - \frac{1}{2}g t_d^2 = -h ,$$

odkiaľ máme

$$t_d^2 + 2\frac{v_0\sin\alpha}{g}t_d - \frac{2h}{g} = 0$$, resp. (pre $t_d > 0$) $$t_d = -\frac{v_0\sin\alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}} .$$

Po dosadení

$$x_d = v_0 t_d\cos\alpha = \frac{v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2hg}{v_0^2\sin^2\alpha}}\right],$$

po úprave

$$d = \frac{v_0^2}{g}\frac{H\sqrt{L^2 - H^2}}{L^2}\left[\sqrt{1 + \frac{2hg}{v_0^2}\frac{L^2}{H^2}} - 1\right].$$ 2 b

Pre dané hodnoty:

pre $H = H_1$ (valivý pohyb) $d_1 \approx 92$ cm, 0,5 b

pre $H = H_2$ (šmýkanie) $d_2 \approx 75$ cm. 0,5 b

2. *Obvod striedavého prúdu IC*

Riešenie:

a) Komplexná impedancia

$$\boldsymbol{Z}_{12}=\frac{\boldsymbol{Z}_C\ \boldsymbol{Z}_{LR}}{\boldsymbol{Z}_C+\boldsymbol{Z}_{LR}}=\frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\left(R+\mathrm{j}\omega L\right)}{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}+R+\mathrm{j}\omega L}=\frac{R+\mathrm{j}\omega L}{1-\omega^2 LC+\mathrm{j}\omega CR}\,. \qquad 2\text{ b}$$

Absolútna hodnota

$$Z=\left|\boldsymbol{Z}\right|=\sqrt{\frac{R^2+(\omega L)^2}{\left(1-\omega^2 LC\right)^2+(\omega CR)^2}}\,. \qquad 1\text{ b}$$

Argument podielu komplexných čísiel je rozdiel argumentov čitateľa a menovateľa

$$\varphi=\operatorname{arctan}\frac{\omega L}{R}-\operatorname{arctan}\frac{\omega CR}{1-\omega^2 LC}\,. \qquad 1\text{ b}$$

<u>Druhá možnosť</u> vychádza z určenia admitancie $\boldsymbol{Y}_{12}=1/\boldsymbol{Z}_{12}$

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}_C+\boldsymbol{Y}_{RL}=\mathrm{j}\omega C+\frac{1}{R+\mathrm{j}\omega L}=\mathrm{j}\omega C+\frac{R-\mathrm{j}\omega L}{R^2+(\omega L)^2}\,.$$

Výraz možno rozdeliť na reálnu a imaginárnu časť

$$\boldsymbol{Y}=\frac{R}{R^2+(\omega L)^2}+\mathrm{j}\omega\left[C-\frac{L}{R^2+(\omega L)^2}\right].$$

Argument impedancie je potom (opačný ako argument admitancie)

$$\varphi=-\operatorname{arctan}\frac{\omega\left[C-\frac{L}{R^2+(\omega L)^2}\right]}{\frac{R}{R^2+(\omega L)^2}}=\operatorname{arctan}\left[\frac{\omega L}{R}\left(1-\omega^2 LC-\frac{C}{L}R^2\right)\right].$$

za časť a) spolu 4 b

b) Z podmienky rezonancie $\varphi=0$ určíme podmienku pre rezonančnú frekvenciu

$$\frac{\omega_\mathrm{r} L}{R}=\frac{\omega_\mathrm{r} CR}{1-\omega_\mathrm{r}^2 LC}\,, \qquad (*)$$

z ktorej máme pre rezonančnú frekvenciu ω_r, resp. f_r

$$\omega_\mathrm{r}=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{L^2}}\,,\ \text{resp.}\ \ f_\mathrm{r}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{L^2}}\,. \qquad 1\text{ b}$$

Pre dané hodnoty $\omega_\mathrm{r}\approx 98\times10^3\ \mathrm{s}^{-1}$, resp. $f_\mathrm{r}\approx 16$ kHz.

Pri rezonančnej frekvencii je impedancia, resp. admitancia, spotrebiča reálna

$$\boldsymbol{Y}_{12\,\mathrm{r}}=\frac{R}{R^2+(\omega_\mathrm{r} L)^2}\,,\ \text{resp.}\ \ \boldsymbol{Z}_{12\,\mathrm{r}}=\frac{R^2+(\omega_\mathrm{r} L)^2}{R}=R+\omega_r^2\frac{L^2}{R}=\frac{1}{R}\frac{L}{C}\,.$$

Pre dané hodnoty $Z_{12\,\mathrm{r}}\approx 5{,}0\ \mathrm{k\Omega}$. 1 b

Odpory R_0 a $\boldsymbol{Z}_\mathrm{r}$ predstavujú napäťový delič. Svorkové napätie

$$U_{12} = U\,\frac{Z_\mathrm{r}}{R_0 + Z_\mathrm{r}} = \frac{\dfrac{1}{R}\dfrac{L}{C}}{R_0 + \dfrac{1}{R}\dfrac{L}{C}}\,U = \frac{L}{C\,R\,R_0 + L}\,U\,.$$

Pre dané hodnoty $U_{12} \approx 6{,}0$ V. 1 b

c) V stave rezonancie je prúd zdroja

$$I = \frac{U}{R_0 + Z_\mathrm{r}} = U\,\frac{R\,C}{C\,R\,R_0 + L} = U\,\frac{1}{R_0 + \dfrac{1}{R}\dfrac{L}{C}}\,.$$

Pre dané hodnoty $I \approx 1{,}2$ mA. 1 b

Prúd zdroja sa delí medzi vetvu s kapacitorom a vetvu s induktorom a rezistorom.

$$\boldsymbol{I}_R = \boldsymbol{I}\,\frac{\boldsymbol{Y}_{RL}}{\boldsymbol{Y}_C + \boldsymbol{Y}_{RL}} = \boldsymbol{I}\,\frac{1}{1-\omega_\mathrm{r}^2\,C\,L + \mathrm{j}\,\omega_\mathrm{r}\,CR} = \boldsymbol{I}\,\frac{1}{1-\omega_\mathrm{r}^2\,C\,L}\;\frac{1}{1+\mathrm{j}\,\dfrac{\omega_\mathrm{r}\,CR}{1-\omega_\mathrm{r}^2\,C\,L}}\,.$$ 1 b

S použitím podmienky (*)

$$\boldsymbol{I}_R = \frac{U}{R}\,\frac{L}{C\,R\,R_0 + L}\;\frac{1}{1+\mathrm{j}\,\dfrac{\omega_\mathrm{r}\,L}{R}}\,.$$

Efektívna hodnota

$$I_R = \frac{U}{R}\,\frac{L}{C\,R\,R_0 + L}\;\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega_\mathrm{r}\,L}{R}\right)^2}} = U\,\frac{1}{R_0 + \dfrac{1}{R}\dfrac{L}{C}}\;\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Pre dané hodnoty $I_\mathrm{R} \approx 12$ mA.

$\dfrac{I_R}{I} = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$. Pre dané hodnoty $I_R\,/\,I = 10$. 1 b

3. *Technéciový generátor*

Riešenie:

a) Vlnová dĺžka

$$\lambda = \frac{h\,c}{E_\gamma} \approx 8{,}8\times10^{-12}\ \text{m}. \qquad 1\ \text{b}$$

Relatívna hmotnosť fotónu

$$\frac{E_\gamma}{E_\text{e}} = \frac{E_\gamma}{m_\text{e}\,c^2} \approx 0{,}27. \qquad 1\ \text{b}$$

b) Aktivita vzorky

$$A = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = A_0\ \mathrm{e}^{-\ln 2\,\frac{t}{T_\text{T}}} \approx 8{,}9\ \text{TBq} \qquad 2\ \text{b}$$

Výkon žiarenia

$$P = E_\gamma\left(-\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right) = E_\gamma\,A_0\ \mathrm{e}^{-\ln 2\,\frac{t}{T_\text{T}}} \approx 200\ \text{mW}. \qquad 1\ \text{b}$$

c) Rovnica premeny ${}^{99}_{42}\text{Mo} \rightarrow {}^{99\text{m}}_{43}\text{Tc} + {}_{-1}\beta$. Ide o β–premenu. 1 b

Začiatočný počet atómov Mo v náplni

$$N_{10} = \frac{m}{M_\text{Mo}}\,N_\text{A} \approx 1{,}5\times10^{23}$$

a začiatočná aktivita

$$A_{10} = \lambda_\text{M}\,N_{10} = \frac{\ln 2}{T_\text{M}}\,N_{10} \approx 4{,}5\times10^{17}\ \text{Bq}. \qquad 2\ \text{b}$$

d) Maximálnu hodnotu $N_{2\text{m}}$ dosiahne počet excitovaných jadier ${}^{99\text{m}}\text{Tc}$, ak počet jadier vznikajúcich za čas dt premenou jadier Mo $\lambda_\text{M} N_1\,\mathrm{d}t$ je rovný počtu ubúdajúcich jadier $\lambda_\text{T}\,N_2\,\mathrm{d}t$ v dôsledku ich prechodu do základného stavu. Aktivita jadier ${}^{99\text{m}}\text{Tc}$ je v tomto čase

$$A_2 = \lambda_\text{T}\,N_2 = \lambda_\text{M}\,N_1 = \frac{\ln 2}{T_\text{M}}\,N_{10}\ \mathrm{e}^{-\ln 2\,\frac{t_1}{T_\text{M}}} \approx 3{,}6\times10^{17}\ \text{Bq}. \qquad 2\ \text{b}$$

4. *Ultrazvuková sonda*

Riešenie:

a) Vlnová dĺžka ultrazvuku $\lambda = \dfrac{c}{f}$. Pre dané hodnoty $\lambda \approx 0{,}31$ mm. 1 b

b) Pásik možno rozdeliť na malé elementy, z ktorých každý prestavuje elementárny zdroj ultrazvukovej vlny. Výsledné vlnenie, podľa Huyghensovho princípu, je dané superpozíciou (súčtom) týchto elementárnych vĺn.

Celú doštičku môžeme napr. rozdeliť na dvojice elementov so vzájomnou vzdialenosťou $a/2$, obr. RA2–2. Dráhový rozdiel interferujúcich vlnení

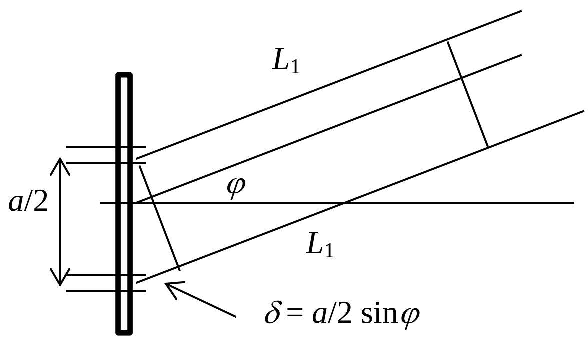
$$\delta = \frac{a}{2}\sin\varphi .$$

Ak je tento rozdiel v smere danom uhlom φ rovný $\lambda/2$, vlnenia sa vzájomne rušia. To sa týka všetkých dvojíc lúčov, preto v danom smere je vyžarovanie nulové.

$$\frac{a}{2}\sin\varphi_0 = \frac{\lambda}{2},$$

odkiaľ máme $\sin\varphi_0 = \dfrac{\lambda}{a} = \dfrac{c}{a\,f}$.

Pre dané hodnoty $\varphi_0 \approx 15°$. 3 b



Obr. RA2–2

c) Medzný uhol

$$\varphi_{\mathrm{m}} \approx \frac{\varphi_0}{2} = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{c}{a\,f}\right) \approx 7{,}4°.$$

Pozn.: Pre $\varphi = 15° \approx 0{,}262$ rad je
$\sin\varphi \approx 0{,}259$ a $\tan\varphi \approx 0{,}268$,
tzn. s dostatočnou presnosťou platí

$\sin\varphi \approx \varphi \approx \tan\varphi$.

Podľa obr. A2–2 pre dĺžku D platí pre malý uhol φ_{m}

$$\frac{a}{2D} = \tan\varphi_{\mathrm{m}} \approx \varphi_{\mathrm{m}} \approx \frac{1}{2}\varphi_0 \approx \frac{1}{2}\frac{\lambda}{a},$$

odkiaľ máme

$D \approx \dfrac{a^2}{\lambda}$. Pre dané hodnoty $D \approx 4{,}6$ mm. 3b

d) Ak máme mriežku rovnobežných N pásikov, možno každý pásik považovať za elementárny zdroj vlnenia. Mriežku rozdelíme na $N/2$ dvojíc pásikov so vzájomnou vzdialenosťou $(N/2)\ d$. Rovnako ako v obr. RA2–2 je dráhová rozdiel interferujúcich vlnení

$$\delta_N = \frac{N\,d}{2}\sin\varphi .$$

Pre $\delta_N = \lambda$ dostávame podmienku minima (pre malý uhol)

$$\varphi_{0N} \approx \frac{\lambda}{N\,d}$$ a pre medzný uhol $$\varphi_{\mathrm{m}N} \approx \frac{\lambda}{2\,N\,d} .$$

Dĺžka Fresnelovej zóny

$$D_N = N^2 \frac{d^2}{\lambda} .$$

Pre dané hodnoty $\varphi_{0N} \approx$ 65 mrad $\approx 3{,}7°$; $\varphi_{\mathrm{m}} \approx 1{,}9°$; $D_N \approx 74$ mm. 3 b

58. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy krajského kola kategórie A*

Autori úloh:	Kamil Bystrický (1), Ivo Čáp (2, 3, 4)
Recenzia a úprava:	Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha
Preklad textov do maďarčiny:	Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017