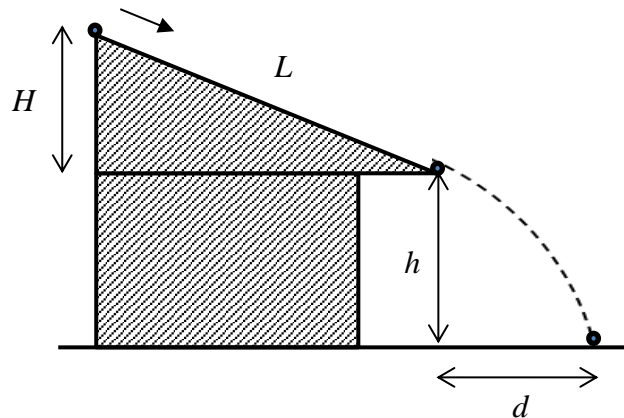


**58. ročník Fyzikálnej olympiády**  
**v školskom roku 2016/2017**  
**Kategória A – krajské kolo**  
*texty úloh*

**1. Gul'ôčka na strieške**

Na vodorovnom dvore sa nachádza malý domček na náradie, obr. A2–1. Na domčeku je šikmá rovinná strecha, ktorá predstavuje naklonenú rovinu s výškovým rozdielom  $H$  a dĺžkou  $L$ . Strecha sa končí vo výške  $h$  nad vodorovným povrchom dvora.

Ak na horný koniec strechy položíme malú homogénnu gul'ôčku, začne sa pohybovať smerom k dolnému koncu strechy a po opustení strechy dopadne na povrch dvora vo vodorovnej vzdialenosti  $d$  od okraja strechy.



Obr. A2–1

Faktor šmykového trenia medzi povrchom gul'ôčky a povrchom strechy je  $f$ .

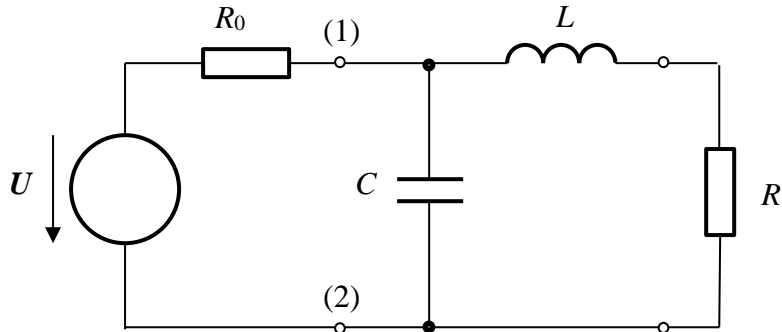
- Nakreslite obrázok gul'ôčky pri pohybe po povrchu strechy a vyznačte v ňom všetky sily pôsobiace na gul'ôčku. Odvodte podmienku pre pomer  $H/L$ , aby sa gul'ôčka pohybovala po povrchu strechy valivým pohybom bez prešmykovania.
- Určte rýchlosť  $v_0$  hmotného stredu gul'ôčky na dolnom konci strechy.
- Určte vzdialenosť  $d$ , v ktorej gul'ôčka dopadla na povrch dvora.

Úlohu riešte všeobecne a pre hodnoty:  $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ ,  $L = 90 \text{ cm}$ ,  $h = 1,5 \text{ m}$ ,  $f = 0,25$  a dve rôzne hodnoty výšky strechy  $H_1 = 50 \text{ cm}$ ,  $H_2 = 70 \text{ cm}$ .

Odpor vzduchu pri pohybe gul'ôčky neuvažujte. Moment zotrvačnosti homogénnej gule s hmotnosťou  $m$  a polomerom  $r$  vzhľadom na os prechádzajúcu jej stredom  $I = (2/5) m r^2$ .

## 2. Obvod striedavého prúdu IC

Ku zdroju striedavého napätia s efektívnou hodnotou napätia  $U$  a vnútorným odporom  $R_0$  je pripojený spotrebič s odporom  $R$  cez prispôsobovací  $CL$  člen, obr. A2-2.



Obr. A2-2

- Určte komplexnú impedanciu  $Z_{12}$  obvodu  $CLR$  vzhľadom na svorky (1)–(2), jej absolútnu hodnotu  $Z_{12}$  a argument  $\varphi$  impedancie  $Z_{12}$ .
- Určte frekvenciu  $f_r$ , pri ktorej je argument  $\varphi$  komplexnej impedancie  $Z_{12}$  nulový (stav rezonancie), a efektívnu hodnotu  $U_{12}$  napätia na svorkách (1)–(2) zdroja pri rezonančnej frekvencii  $f_r$ .
- Určte efektívnu hodnotu  $I$  prúdu prechádzajúceho zdrojom, efektívnu hodnotu  $I_R$  prúdu prechádzajúceho rezistorom s odporom  $R$  a pomer  $I_R/I$  v stave rezonancie.

Úlohu riešte všeobecne a pre hodnoty  $U = 12 \text{ V}$ ,  $R_0 = 5,0 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 20 \text{ nF}$ ,  $L = 5,0 \text{ mH}$ ,  $R = 50 \Omega$ .

### 3. Technéciový generátor

Rádiofarmaká sú rádioaktívne látky, ktoré sa používajú na lekárske účely. Jedným z najpoužívanejších rádionuklidov je  $\gamma$ -žiarič technécium  ${}^{99m}_{43}\text{Tc}$ . Index „m“ znamená, že jadro je v excitovanom stave a pri prechode do základného stavu  ${}^{99}_{43}\text{Tc}$  vyžiari  $\gamma$ -fotón s energiou  $E_\gamma = 140 \text{ keV}$ . Polčas prechodu z excitovaného do základného stavu  $T_T = 6,0 \text{ h}$ .

- Určte vlnovú dĺžku  $\lambda$  vyžarovaných  $\gamma$ -fotónov. Energiu fotónu porovnajte s pokojovou energiou elektrónu, ktorej hmotnosť je  $m_e$ !
- Pre lekárske použitie pripravili vzorku s aktivitou  $A_0 = 15 \text{ TBq}$ . Medzi výrobou vzorky a jej aplikáciou uplynula doba  $t = 4,5 \text{ h}$ . Určte aktivitu  $A$  a výkon  $P$   $\gamma$ -žiarenia vzorky v čase jej aplikácie.

Keďže aktivita rádiofarmaka veľmi rýchlo klesá, musí sa pripraviť priamo v zdravotníckom zariadení. Používa sa k tomu technéciový generátor. Východiskovým materiálom je rádioaktívny izotop molybdén  ${}^{99}_{42}\text{Mo}$ , ktorý sa získava zo stabilného izotopu  ${}^{98}\text{Mo}$  ostreľovaním neutrónmi z nukleárneho reaktora alebo ako produkt štiepenia uránu  ${}^{235}\text{U}$ . Rádioizotop  ${}^{99}\text{Mo}$  sa mení na  ${}^{99m}\text{Tc}$  s polčasom premeny  $T_M = 65 \text{ h}$ , tzn. časové nároky na prepravu a manipuláciu  ${}^{99}\text{Mo}$  nie sú preto tak veľké.

Začiatočná náplň generátora je kompozit  $\text{Mo-Al}_2\text{O}_3$ , molybdén je viazaný v kryštálovej mriežke oxidu hlinitého. Pri rádioaktívnej premene vzniká  ${}^{99m}\text{Tc}$ , ktoré je viazané na  $\text{Al}_2\text{O}_3$  slabšie a vyplavuje sa z generátora metódou stĺpcovej chromatografie. Získava sa tak roztok s obsahom  ${}^{99m}\text{Tc}$ .

- Napíšte rovnicu premeny  ${}^{99}\text{Mo}$  na  ${}^{99m}\text{Tc}$  a uveďte, o akú premenu ide. Určte aktivitu  $A_{10}$  začiatočnej náplne generátora, ktorá obsahuje  $m_1 = 25 \text{ g}$  molybdénu  ${}^{99}\text{Mo}$ .

Po naplnení generátora kompozitom postupne klesá počet jadier  $\text{Mo}$  a narastá počet jadier  ${}^{99m}\text{Tc}$ . Počet jadier  ${}^{99m}\text{Tc}$  dosiahne maximálnu hodnotu za dobu  $t_1 = 22 \text{ h}$ .

- Určte aktivitu  $A_2$  vzorky  ${}^{99m}\text{Tc}$ , ktorá sa získa vyplavením všetkých atómov  ${}^{99m}\text{Tc}$  z generátora v uvedenom čase  $t_1$ .

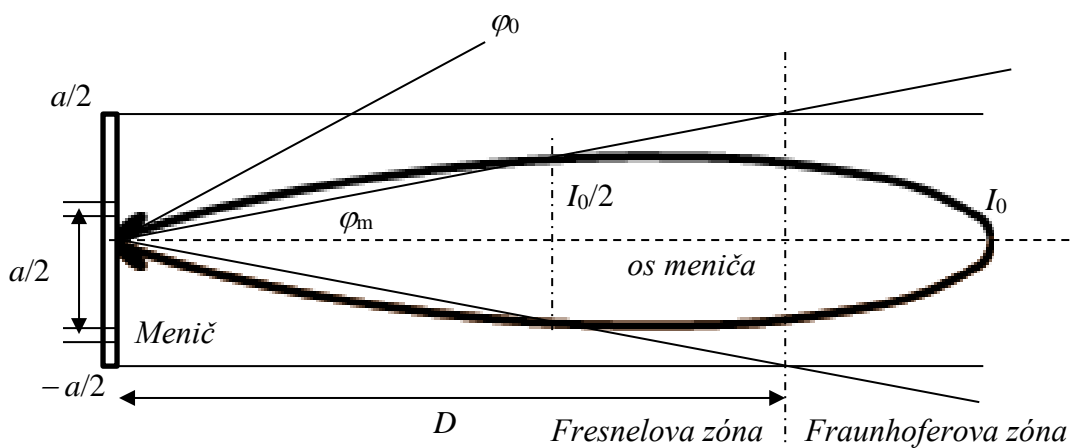
V praxi sa rádioaktívny preparát  ${}^{99m}\text{Tc}$  z generátora vyplavuje častejšie (po 6 až 12 hodinách) opakovane až po dobu jedného týždňa, a tak generátor slúži celý týždeň ako zdroj rádiofarmaka.

Hodnoty koeficientov a konštánt:  $N_A = 6,0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ,  $M_{\text{Mo}} = 99 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ,  $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ ,  $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

#### 4. Ultrazvuková sonda

V ultrazvukovej defektoskopii alebo v lekárskej ultrasonografii sa na generovanie ultrazvuku používajú piezokeramické meniče, tenké doštičky, ktoré sa rozkmitávajú striedavým elektrickým napätím. Kmity doštičky sa prenášajú do telesa priamym kontaktom so skúmaným telesom, a tak v ňom generujú ultrazvukovú vlnu. Ultrazvuk sa odráža od nehomogenít vo vnútri telesa a vracia sa naspäť k meniču, ktorý slúži aj ako detektor. Aby sa dalo určiť, v ktorom smere sa nachádza nehomogenita, musí byť ultrazvukový zväzok dostatočne úzky.

Uvažujme menič v tvare dlhého úzkeho pásika so šírkou  $a$ , ktorého celý povrch kmitá v smere kolmom na povrch pásika s frekvenciou  $f$ , obr. A2–3. V blízkej vzdialenosti (Fresnelovej zóne) má generovaný Fresnelov zväzok šírku  $a$  rovnú šírke meniča. Vo veľkej vzdialenosti (Fraunhoferova zóna) sa uplatňuje rozbiehavosť zväzku spôsobená difrakciou. Intenzita  $I$  difrakčného zväzku ultrazvuku ako funkcia uhlu  $\varphi$  vyžarovania vzhľadom na os meniča v obrázku je znázornená hrubou čiarou. V priamom smere má intenzita zväzku maximálnu hodnotu  $I_0$  a so zväčšovaním uhla  $\varphi$  vyžarovania intenzita klesá až k nulovej hodnote pre uhol  $\varphi_0$ . Pri uhle  $\varphi_m \approx \varphi_0/2$ , ktorý sa nazýva medzný uhol zväzku, je intenzita vyžarovania polovičná  $I_0/2$ . Priesečník polpriamky uhlu  $\varphi_m$  s hraničnou polpriamkou Fresnelovho zväzku určuje hranicu oboch zón. Dĺžka blízkej (Fresnelovej) zóny je  $D$ .



Obr. A2–3

- Určte vlnovú dĺžku  $\lambda$  ultrazvuku v látke.
- Určte uhol  $\varphi_0$ , pri ktorom je intenzita vyžarovania nulová v dôsledku difrakcie na pásiku meniča.
- Určte dĺžku  $D$  Fresnelovej zóny meniča pre vlnovú dĺžku  $\lambda$  a malý uhol  $\varphi_0 \ll 1$  rad.

Na predĺženie Fresnelovej zóny sa používa namiesto jedného pásika štruktúrovaný menič – mriežka, ktorá pozostáva z  $N$  dlhých rovnobežných pásikov vedľa seba so vzájomnou vzdialenosťou  $d$  ich stredov.

- Určte hodnoty  $\varphi_{0N}$ ,  $\varphi_{mN}$  a  $D_N$  pre takýto štruktúrovaný menič.

Úlohu riešte všeobecne a pre hodnoty:  $a = 1,2$  mm,  $d = 0,30$  mm a  $N = 16$ , frekvencia ultrazvuku  $f = 5,0$  MHz, rýchlosť šírenia ultrazvuku v látke  $c = 1\,540$  m·s<sup>-1</sup>.