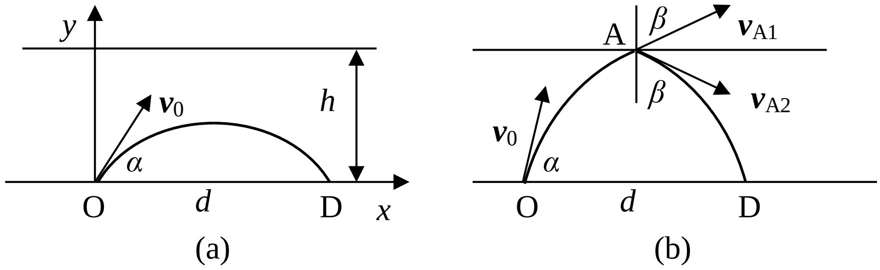
58. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2016/17

Kategória B – krajské kolo
Riešenie úloh

1. *Odraz lopty od stropu*

a) Obrázok RB–1. Môžu nastať dve situácie – loptička nedosiahne strop (obr. RB–1(a)) alebo loptička vyletí až k stropu a odrazí sa od neho (obr. RB–1(b)). 2 b



Obr. RB–1

b) Ide o šikmý vrh nahor, pre ktorý platia vzťahy

$$v_x = v_0 \cos\alpha\,, \qquad x = v_0\, t \cos\alpha\,,$$

$$v_y = v_0 \sin\alpha - g\,t\,, \qquad y = v_0\, t \sin\alpha - \frac{1}{2} g\, t^2\,.$$

Maximálna výška šikmého vrhu je daná podmienkou $v_y = 0$, z ktorej určíme čas výstupu t_v a výšku y_v

$$t_\mathrm{v} = \frac{v_0}{g} \sin\alpha \qquad y_\mathrm{v} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \sin^2\alpha\,.$$ 2 b

Ak je $y_\mathrm{v} \leq h$, loptička nedosiahne strop, ak $y_\mathrm{v} > h$, loptička dosiahne strop, od ktorého sa odrazí.

– Prvý prípad (bez odrazu) - dané veličiny spĺňajú podmienku

$$\frac{v_0^2}{h} \sin^2\alpha \leq 2g\,.$$

Vzhľadom na symetriu trajektórie šikmého vrhu je čas prvého dopadu loptičky

$$t_\mathrm{D} = 2 t_\mathrm{v} = \frac{2\, v_0}{g} \sin\alpha$$ 1 b

a vzdialenosť bodu D dopadu od bodu O

$$d = x_\mathrm{D} = v_0\, t_\mathrm{D} \cos\alpha = \frac{2\, v_0^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha\,.$$ 1 b

– V druhom prípade (s odrazom) dané veličiny spĺňajú podmienku

$$\frac{v_0^2}{h}\sin^2\alpha > 2g\,.$$

Loptička vystúpi do výšky h za čas daný kvadratickou rovnicou

$$h = v_0\, t_h \sin\alpha - \frac{1}{2} g\, t_h^2\,,\ \text{resp.}\quad t_h^2 - 2\frac{v_0 \sin\alpha}{g} t_h + \frac{2h}{g} = 0\,,$$

ktorej riešenie je

$$t_h = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 - \frac{2h}{g}}\,. \qquad (1)$$

Dve riešenia teoreticky zodpovedajú dvom prechodom loptičky pri šikmom vrhu výškou h, prvému pri výstupe nahor a druhému pri zostupe nadol. Loptička narazí na strop pri výstupe nahor (čomu zodpovedá menší z dvoch časov t_h), a preto v našom prípade použijeme menšiu hodnotu t_h, teda riešenie so znamienkom (−) vo výsledku (1).

Bod odrazu A má súradnicu

$$x_\mathrm{A} = v_0\, t_h \cos\alpha = v_0 \cos\alpha \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g} - \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 - \frac{2h}{g}}\right).$$

Keďže je odraz loptičky dokonale pružný, rýchlosť $v_{\mathrm{A}2}$ jej odrazu od stropu je rovnaká ako rýchlosť $v_{\mathrm{A}1}$ jej dopadu na strop a tiež uhol β odrazu je rovný uhlu dopadu loptičky na strop, obr. RB–1(b). Trajektória loptičky po odraze je zrkadlovým obrazom trajektórie pred odrazom vzhľadom na zvislú priamku prechádzajúcu bodom A. Čas dopadu loptičky

$$t_\mathrm{D} = 2 t_h = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2hg}{v_0^2 \sin^2\alpha}}\right) \qquad 1\ \text{b}$$

a vzdialenosť bodu D dopadu od bodu O

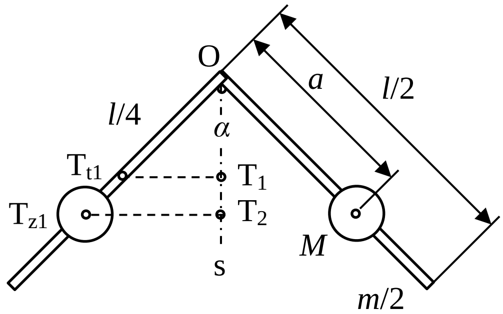
$$d = 2 x_\mathrm{A} = \frac{2 v_0^2 \sin\alpha\, \cos\alpha}{g}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2hg}{v_0^2 \sin^2\alpha}}\right). \qquad 1\ \text{b}$$

Pre dané hodnoty:

– pre uhol $\alpha_1 = 30°$ máme $y_\mathrm{v} \approx 5{,}1$ m, loptička nedosiahne strop a
  $t_{\mathrm{D}1} \approx 2{,}0$ s, $d_1 \approx 35$ m. 0,5 + 0,5 b
– pre uhol $\alpha_2 = 60°$ máme $y_\mathrm{v} \approx 15$ m, loptička dosiahne strop a odrazí sa od neho $t_{\mathrm{D}2} \approx 0{,}56$ s, $d_2 \approx 5{,}6$ m. 0,5 + 0,5 b

2. *Kmity ohnutej tyče*

a) Obrázok RB–2 1 b



Obr. RB–2

Keďže je sústava symetrická vzhľadom na zvislú os „s“ prechádzajúcu vrcholom O, ťažisko ohnutej tyče T_t leží v bode T_1 vo vzdialenosti $r_1 = (l/4)\cos(\alpha/2)$ od osi O. Ťažisko dvojice závaží je vo vzdialenosti $r_2 = a\cos(\alpha/2)$ od osi O v bode T_2. Ťažisko celej sústavy je vo vzdialenosti

$$r_T = \frac{1}{m+2M}\left(m\,r_1 + 2M\,r_2\right) = \frac{m\frac{l}{4} + 2M\,a}{m+2M}\cos\frac{\alpha}{2}\ . \qquad (1) \qquad 1\text{ b}$$

Pre $m >> M$ je ťažisko sústavy v bode T_1 – obr. RB–2,

pre $m << M$ je ťažisko sústavy v bode T_2.

Pre všeobecný prípad sa ťažisko nachádza na úsečke T_1T_2. spolu 1 b

b) Sústava kmitá ako tuhé teleso s hmotnosťou $m + 2M$ s ťažiskom v bode T, OT = r_T okolo vodorovnej osi O v gravitačnom poli. Keďže ide o otáčavý pohyb okolo osi O, platí preň pohybová rovnica $I\,\varepsilon = M$, kde ε je uhlové zrýchlenie. 1 b

Moment zotrvačnosti vzhľadom na os O je daný súčtom momentov zotrvačnosti jednotlivých častí sústavy

$$I = 2\ \frac{1}{3}\,\frac{m}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + 2\ M\,a^2 \approx \frac{1}{12}\,m\,l^2 + 2\,M\,a^2\,.$$

Moment gravitačnej sily, ktorý upravíme pomocou výrazu (1)

$$M = -\left(m + 2\,M\right)g\ r_T\ \sin\varphi \approx -\left[\left(m\frac{l}{4} + 2M\,a\right)g\cos\frac{\alpha}{2}\right]\varphi = -\,D\,\varphi\,. \qquad 1\text{ b}$$

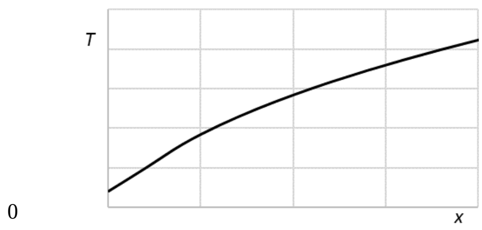
Perióda malých kmitov (φ << 1 rad, kedy platí sin$\varphi \approx \varphi$)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} = T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\frac{\alpha}{2}}}\sqrt{\frac{\frac{a^2}{l^2} + \frac{m}{24M}}{\frac{a}{l} + \frac{m}{8M}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\frac{\alpha}{2}}}\sqrt{\frac{x^2 + \frac{1}{6}\,\frac{m}{4M}}{x + \frac{m}{8M}}}\ .2\text{ b}$$

Ak $x << m/M$ $\quad T \to 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\frac{\alpha}{2}}}\sqrt{\frac{1}{3}} = T_0\,,$

pre $x >> m/M$ $\quad T \to 2\pi \sqrt{\dfrac{l}{g \cos \dfrac{\alpha}{2}}} \sqrt{x} = T_0 \sqrt{3x}$.

Ide o rastúcu funkciu, ktorá sa pre malý pomer $x \to 0$ blíži ku konštantnej hodnote T_0 a pre $x >> m/M$ rastie priamo úmerne funkcii $\sqrt{x}$. Graf vyzerá približne takto:



1 b

c) Počas kmitavého pohybu sa zachováva mechanická energia sústavy. Kinetická energia pri prechode rovnovážnou polohou je rovná potenciálnej energii v krajnej polohe

$$E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{p\,max}} = (m + 2M)\, g\, h_{\mathrm{T}} = \left(m \frac{l}{4} + 2M\, a \right) g \cos \frac{\alpha}{2} (1 - \cos \varphi) \, . \qquad 2\ \mathrm{b}$$

3. *Bainbridgeov hmotnostný spektrometer*

a) Zmena kinetickej energie je rovná práci elektrického poľa

$$\frac{1}{2} m\, v_0^2 = \frac{1}{2} m\, v_{\mathrm{m}}^2 + e\, U_0 ,$$

odkiaľ

$U_0 = \dfrac{A m_{\mathrm{U}}}{2e} \left(v_0^2 - v_{\mathrm{m}}^2 \right)$. Pre dané hodnoty (A = 16) $U_0 \approx 83$ kV. 3 b

b) Častica prejde medzi vstupným a výstupným otvorom po priamke, musia byť sily elektrického a magnetického poľa v rovnováhe

$$e\, E = e\, v_0\, B ,$$

odkiaľ máme

$E = v_0\, B$. Pre dané hodnoty $E \approx 1{,}5\ \mathrm{MV{\cdot}m^{-1}}$. 1 b

Častice s inou rýchlosťou sa pohybujú po zakrivenej trajektórii a výstupným otvorom neprejdú. Selektor tak vyberá iba častice s danou rýchlosťou bez ohľadu na ich náboj a hmotnosť. 1 b

c) V homogénnom magnetickom poli pôsobí na časticu s nábojom -e sila $\boldsymbol{F} = -e\, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$. Keď je $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{B}$, je sila $\boldsymbol{F}$ kolmá na smer pohybu (dostredivá sila) a nedochádza k zmene rýchlosti (rovnomerný pohyb) po trajektórii s polomerom krivosti daným vzťahom

$$m \frac{v^2}{R} = e\, v\, B \text{, odkiaľ } R = \frac{m v}{e\, B} .$$

Polomer je konštantný, a teda ide o oblúk kružnice. Častice sa pohybujú po polkružnici a dopadajú na detektor vo vzdialenosti

$$x = 2R = \frac{2mv}{eB}.$$ 1,5 b

Častice dopadajú do rôznych vzdialeností podľa hmotnosti, a tak dochádza k ich separácii (oddeleniu).

Pre dané hodnoty $x_{16} \approx 221$ mm, $x_{17} \approx 235$ mm, $x_{18} \approx 249$ mm. 3 x 0,5 b

d) Vzdialenosť susedných bodov dopadu v detekčnej rovine

$$\Delta x = \frac{2\Delta m v}{eB}.$$

Pre $\Delta m = u$ a dané hodnoty $\Delta x \approx 14$ mm. 2 b

4. *Indukčná cievka*

a) Odpor vodiča

$$R = \frac{1}{\gamma}\frac{l}{S} = \frac{1}{\gamma}\frac{4Nl_1}{\pi d^2}.$$ Pre dané hodnoty $R \approx 72\ \Omega$. 2 b

b) Magnetický tok v jadre $\Phi = BS$ a magnetický tok cievky $\Phi_c = N\Phi = LI$. Prúd I_m zodpovedajúci indukcii B_m

$$I_m = \frac{NS}{L}B_m.$$ Pre dané hodnoty $I_m = 36$ mA. 3 b

c) Efektívna hodnota prúdu v cievke

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (2\pi f L)^2}}.$$ Pre dané hodnoty $I = 15$ mA. 3 b

d) Zmena teploty pri hmotnosti m vinutia cievky

$$\Delta T = \frac{P\Delta t}{mc} = \frac{RI^2\Delta t}{\rho c N l_1 (\pi d^2/4)}.$$ Pre dané hodnoty $\Delta T \approx 17$ mK. 2 b

58. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy krajského kola kategórie B*

Autori návrhov úloh: Ľubomír Konrád (1, 2), Ivo Čáp (3, 4)
Spracovanie návrhov: Ivo Čáp
Recenzia a úprava: Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha
Preklad textov zadaní úloh do maďarčiny: Aba Teleki
Redakcia: Ivo Čáp

Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017