

**58. ročník Fyzikálnej olympiády  
v školskom roku 2016/17**

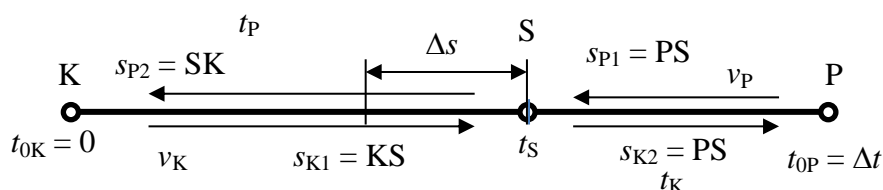
**Kategória D – krajské kolo**

*Riešenie úloh*

**1. Výlet na bicykloch**

a) Obrázok

1 b



Obr. RD-1

b) Čas štartu Košičana (K) označíme  $t_{K0} = 0$ , a oneskorený čas štartu Prešovčana (P)  $t_{P0} = \Delta t$ . Označíme  $t_S$  čas jazdy K do bodu stretnutia na dráhe  $s_{K1} = v_K t_S$  a  $t_S - \Delta t$  čas jazdy P do bodu stretnutia na dráhe  $s_{P1} = v_P (t_S - \Delta t)$ . Rozdiel týchto dráh  $\Delta s = s_{K1} - s_{P1}$ .

Pre zvyšok jazdy platí podľa zadania  $s_{K2} = s_{P1} = v_K t_K$  a  $s_{P2} = s_{K1} = v_P t_P$ . Dostávame tak rovnice

$$v_K t_K = v_P (t_S - \Delta t) \quad \text{a} \quad v_P t_P = v_K t_S.$$

Hľadaný čas  $t_S$ , získame z kvadratickej rovnice, ktorú dostaneme napr. dosadením jednej z neznámych rýchlostí  $v_P, v_K$  z druhej rovnice do prvej a jednoduchou úpravou

$$t_S^2 - \Delta t t_S - t_P t_K = 0,$$

ktorá má riešenie

$$t_S = \frac{\Delta t}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 + t_P t_K}.$$

Fyzikálny zmysel má riešenie (+), lebo pre (-) je výsledok záporný.

Chlapci sa stretnú v čase 8:00 hod. +  $t_S$ , kde

$$t_S = \frac{\Delta t}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 + t_P t_K}. \quad \text{Pre dané hodnoty } t_S = 69 \text{ min} = 1 \text{ h } 9 \text{ min.} \quad 2 \text{ b}$$

Čas stretnutia je 9:09 hod. 0,5 b

c) Rozdiel dráh  $\Delta s$  medzi dráhou K a P do okamihu stretnutia možno vyjadriť dvojakým spôsobom

$$\Delta s = v_K t_S - v_P t_P = v_K t_S - v_P (t_S - \Delta t)$$

$$\text{a } \Delta s = v_P t_P - v_K t_K. \quad (1)$$

Z rovnosti pravých strán máme

$$v_P = v_K \frac{t_S + t_K}{t_P + t_S - \Delta t} \quad (2)$$

a po dosadení do druhej rovnice (1) a po úprave dostaneme

$$v_K = \Delta s \frac{t_P + t_S - \Delta t}{t_P t_S - t_K (t_S - \Delta t)} \quad (3) \quad 2 \text{ b}$$

a ďalej tiež dosadením (3) do druhej rovnice (1) a úprave

$$v_P = \Delta s \frac{t_S + t_K}{t_P t_S - t_K (t_S - \Delta t)} \quad (4) \quad 2 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty  $v_P = 24 \text{ km/h}$ ,  $v_K = 16 \text{ km/h}$ . 0,5 + 0,5 b

- d) Celková dĺžka cesty  $s = s_{K2} + s_{P2} = v_K t_K + v_P t_P$ , po dosadení  $v_K$ ,  $v_P$  z výrazov (3) a (4) a po úprave dostaneme

$$s = \Delta s \frac{t_P t_S + t_K (2t_P + t_S - \Delta t)}{t_P t_S - t_K (t_S - \Delta t)} \quad 1 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty  $s = 32 \text{ km}$ . 0,5 b

## 2. Zrážka gule a hranola

- a) Náčrtok RD–2 0,5 b



Obr. RD–2

Tesne po zrážke má hranol rýchlosť  $v_1$  a guľa rýchlosť  $v_2$ . Pre zrážku platí zákon zachovania hybnosti a v našom prípade (pružná zrážka) sa zachováva aj kinetická energia sústavy

$$m_2 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (1) \quad 1 \text{ b}$$

$$\frac{1}{2} m_2 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (2) \quad 1 \text{ b}$$

Rovnice možno upraviť na tvar

$$m_2 (v_0 - v_2) = m_1 v_1 \quad (3)$$

$$m_2 (v_0^2 - v_2^2) = m_1 v_1^2, \text{ resp. } m_2 (v_0 - v_2)(v_0 + v_2) = m_1 v_1^2.$$

Ak druhú rovnicu delíme prvou, dostávame

$$v_0 + v_2 = v_1. \quad (4)$$

Po dosadení do (3) máme

$$v_2 = v_0 \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \quad \text{a} \quad v_1 = v_0 \frac{2m_2}{m_2 + m_1}. \quad 1 + 1 \text{ b}$$

Hranol sa po zrážke pohybuje po podložke, pričom kinetická energia sa postupne premení na vnútornú energiu trením  $-\Delta E_k = W$ , kde  $W = F_t d = f m_1 g d$ . 1 b

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 \left( \frac{2m_2}{m_2 + m_1} \right)^2 = f m_1 g d, \quad 1 \text{ b}$$

odkiaľ

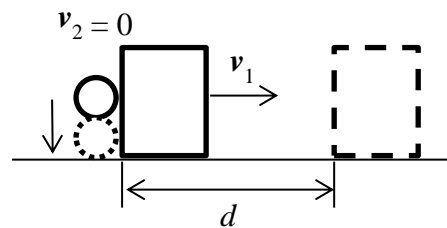
$$d = \frac{v_0^2}{2 f g} \left( \frac{2m_2}{m_2 + m_1} \right)^2. \quad 1 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty  $d = 69 \text{ cm}$ . 0,5 b

b) Náčrtok RD-3 0,5 b

Ak má padať guľa zvislo nadol, musí mať po zrážke nulovú rýchlosť.

To nastane iba v prípade rovnakých hmotností  $m_1 = m_2$ . 1,5 b



Obr. RD-3

### 3. Fyzikálny model ruky

a) Na sústavu ruky pôsobia sila  $F_b$  šľachy, gravitačná sila celej sústavy  $F_{g1} = m g$  a  $F_k$  tlaková sila kĺbového puzdra. V rovnováhe je moment síl vzhľadom na bod K

$$F_{b1} r - F_{g1} d_1 = 0.$$

Odtiaľ máme

$$F_{b1} = m g \frac{d_1}{r}. \quad 2 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty  $F_b = 550 \text{ N}$ . 0,5 b

Podmienka rovnováhy síl vo vodorovnom  $x$  smere a zvislom  $y$  smere je

$$F_{b1} = F_{k1x} \quad \text{a} \quad F_{k1y} = F_{g1}.$$

Tlaková sila v kĺbe

$$F_{k1} = \sqrt{F_{k1x}^2 + F_{k1y}^2} = \sqrt{F_{b1}^2 + F_{g1}^2} = m_1 g \sqrt{1 + \left( \frac{d_1}{r} \right)^2}. \quad 2 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty  $F_k \approx 553 \text{ N}$ . 0,5 b

b) Pri zaťažení činkou v dlani je podmienka rovnováhy

$$F_{b2} r = F_{g1} d_1 + F_{g2} d_2 ,$$

odkiaľ máme

$$F_{b2} = \frac{m_1 d_1 + m_2 d_2}{r} g . \quad 2 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty  $F_{b2} \approx 3,5 \text{ kN}$ . 0,5 b

Podmienka rovnováhy síl v smeroch  $x$  a  $y$

$$F_{b2} = F_{k2x} \quad \text{a} \quad F_{k2y} = (m_1 + m_2) g .$$

Tlaková sila v kĺbe

$$F_{k2} = \sqrt{F_{k2x}^2 + F_{k2y}^2} = \sqrt{F_{b2}^2 + (F_{g1} + F_{g2})^2} = g \sqrt{\left(\frac{m_1 d_1 + m_2 d_2}{r}\right)^2 + (m_1 + m_2)^2} . \quad 2 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty  $F_{k2} \approx 3,5 \text{ kN}$ . 0,5 b

#### 4. Skok na snowborde

a) Ak neuvažujeme trenie, zo zákona zachovania energie máme

$$m g h_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 ,$$

odkiaľ  $v_0 = \sqrt{2 g h_0}$ . Pre dané hodnoty  $v_0 \approx 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . (1) 2 b

b) Z bodu B ide o šikmý vrh. Začiatočná rýchlosť má vodorovnú zložku  $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$  a zvislú zložku  $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$ .

Na snoubordistu pôsobí iba gravitačná sila  $\mathbf{F}_g = m \mathbf{g}$  zvislo nadol. V zvislom smere ide o rovnomerne zrýchlený pohyb, pre ktorý platí

$$v_y = v_0 \sin \alpha - g t , \quad (2)$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - (1/2) g t^2 . \quad (3)$$

Vo vodorovnom smere ide o rovnomerný pohyb (nulová zložka sily)

$$v_x = v_0 \cos \alpha \quad (4)$$

$$x = v_0 t \cos \alpha . \quad (5)$$

V bode C snoubordista prestáva stúpať, tzn.  $v_{Cy} = 0$ . Celková rýchlosť  $v_C = v_{Cx}$  (3).

Opäť zo zákona zachovania energie

$$m g h_0 = \frac{1}{2} m v_C^2 + m g h ,$$

odkiaľ máme s použitím (1)

$$h = h_0 - \frac{1}{2g} v_C^2 = h_0 - \frac{1}{2g} v_0^2 \cos^2 \alpha = h_0 (1 - \cos^2 \alpha) = h_0 \sin^2 \alpha .$$

Pre dané hodnoty  $h \approx 5,0$  m.

2 b

- c) V bode D je nulová výška snoubordistu  $y_D = 0$ . Z (3) určíme čas letu

$$t_D = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g} .$$

Po dosadení do (5) máme

$$d = v_0 t_D \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} 2 \sin \alpha \cos \alpha = 4 h_0 \sin \alpha \cos \alpha .$$

Pre dané hodnoty  $d \approx 35$  m.

2 b

- d) V bode C je sila  $F_g$  kolmá na smer pohybu, tzn. ide o dostredivú silu

$$F_d = m \frac{v_C^2}{R} = m g , \quad (6)$$

odkiaľ

$$R = \frac{v_C^2}{g} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} = 2 h_0 \cos^2 \alpha . \text{ Pre dané hodnoty } R \approx 30 \text{ m.} \quad 2 \text{ b}$$

V sústave spojennej so snoubordistom (neinerciálnej vzťažnej sústave) pôsobí okrem gravitačnej sily  $F_g$  zotrvačná sila  $F_o = m v_C^2/R$ . Obe sily sú rovnako veľké, pozri (6), a majú opačný smer. Ich súčet je preto nulový. V okamihu prechodu bodom C ide o nulovú tiaž – beztiažový stav. 2 b

### 58. ročník Fyzikálnej olympiády – Úlohy krajského kola kategórie D

Autori návrhov úloh: Lubomír Mucha (1), Lubomír Konrád (2, 3, 4)

Spracovanie návrhov: Ivo Čáp

Recenzia a úprava: Daniel Klivanec, Lubomír Mucha

Preklad zadání úloh do maďarčiny: Aba Teleki

Redakcia: Ivo Čáp

Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017