

59. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2017/2018
Kategória A – domáce kolo
Text úloh

1. Temná hmota vo vesmíre

Určitou záhadou pri skúmaní vesmíru je existencia *temnej hmoty*. Ide o hmotu, ktorá nie je viditeľná bežnými pozorovacími prostriedkami, ale prejavuje sa gravitačnými účinkami. O existencii temnej „hmoty“ prvýkrát referoval už v roku 1933 astronóm Fritz Zwicky, ktorý zistil nezrovnalosti pri štúdiu rotácie galaxií. Hviezdy obiehajú po kružnicových trajektóriách okolo jadra galaxie, pričom podľa pozorovania rýchlosť pohybu hviezd nezávisí od vzdialenosti od jadra, obr. A–1. To je v rozpore s výpočtom podľa Keplerových zákonov. Tento rozpor sa riešil predpokladom o existencii neviditeľnej temnej hmoty, ktorá je rozložená okolo jadra galaxie.



Obr. A–1 Galaxia Andromeda

Pre zjednodušenie predpokladajte, že podstatná časť pozorovanej hmoty galaxie sa nachádza v guľovom jadre s polomerom $r_1 = 4,0$ kpc podstatne menším ako polomer galaxie. Okolo jadra po sústredných kružniciach sa pohybujú hviezdy, pričom rýchlosť $v_0 = 240 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ ich pohybu je rovnaká od okraja jadra až do vzdialenosti $r_2 = 7 r_1$ od stredu galaxie. Hmotnosť prstenca, ktorý pozostáva z obiehajúcich hviezd, je podstatne menšia ako hmotnosť jadra. Predpokladajte ďalej, že temná hmota v galaxii je rozložená guľovo symetricky okolo stredu galaxie.

- Určte hmotnosť M_1 jadra galaxie.
- Určte strednú hustotu ρ_1 hmoty jadra.
- Nájdite závislosť hustoty ρ_2 temnej hmoty od vzdialenosti r od stredu galaxie pre $r_1 \leq r \leq r_2$.
- Vypočítajte pomer hmotnosti M_2 temnej hmoty v galaxii v rozsahu vzdialenosti $r_1 \leq r \leq r_2$, ktorá ovplyvňuje pohyb hviezd okolo jadra, a hmotnosti M_1 jadra galaxie.

Gravitačná konštanta $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$, $1 \text{ kpc} = 3,086 \cdot 10^{19} \text{ m}$.

2. Inverzný Comptonov jav

V roku 1921 Arthur Holly Compton (1892 – 1962) navrhol experiment, ktorým sa potvrdila Einsteinova hypotéza (z roku 1905) o šírení elektromagnetickej energie po kvantách, neskôr nazvaných *fotóny*, ktoré sa pri interakcii s inými časticami správajú ako mechanické častice so zodpovedajúcou hmotnosťou a hybnosťou. Rozptyl röntgenového žiarenia na voľných elektrónoch túto hypotézu potvrdil a po svojom autorovi sa nazýva Comptonov jav. Pri normálnom Comptonovom jave odovzdáva fotón časť svojej energie pomalým elektrónom.

Existuje však aj inverzný Comptonov jav, kedy fotóny interagujú s rýchlymi elektrónmi a energiu od nich získavajú.

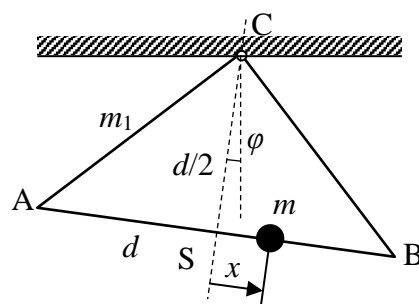
Uvažujme nasledujúcu úlohu. Fotón F1 s vlnovou dĺžkou λ_1 interagoval (sa zrazil) s rýchlym voľným elektrónom E1, pohybujúcim sa rýchlosťou v_e . Elektrón sa v dôsledku interakcie (zrážky) zastavil a fotón sa odchytil od pôvodného smeru o uhol $\varphi_1 = 60^\circ$. Vlnová dĺžka odchyteného fotónu F2 $\lambda_2 = 1,25 \times 10^{-12}$ m. Označte α uhol medzi vektormi hybnosti fotónu a elektrónu pred zrážkou.

- Opíšte interakciu (zrážku) fotónu s elektrónom a nakreslite vektorový diagram hybností častíc pred zrážkou a po nej. Dĺžky a smery vektorov zdôvodnite. Určte interval hodnôt uhla α , aby mohol uvedený jav nastať.
- Určte vlnovú dĺžku λ_1 fotónu F1. Uvážte, či je potrebné úlohu riešiť relativisticky alebo či postačí výpočet podľa klasickej fyziky.
- Aké elektrické napätie U je potrebné na urýchlenie elektrónu zo stavu pokoja na rýchlosť v_e ?
- Určte uhol α , ktorý zvieral vektor rýchlosti elektrónu pred zrážkou so smerom pohybu fotónu F1.
- Určte pomer k de Broglieho vlnovej dĺžky λ_e elektrónu pred zrážkou a vlnovej dĺžky λ_1 fotónu.

Potrebné konštanty vyhľadajte v tabuľkách alebo na internete.

3. Kmity rámu s telieskom

Rám v tvare pravouhlého rovnoramenného trojuholníka s dĺžkou základne d , ktorý je vytvorený z homogénneho drôtu s hmotnosťou m_1 je zavesený v jeho vrchole C tak, že okolo tohto bodu v zvislej rovine rámu môže vykonávať kmitavý pohyb. Na základni trojuholníka sa nachádza teliesko s hmotnosťou m , ktoré možno posúvať pozdĺž základne, pričom posunutie od stredu S základne označíme x , obr. A-2.



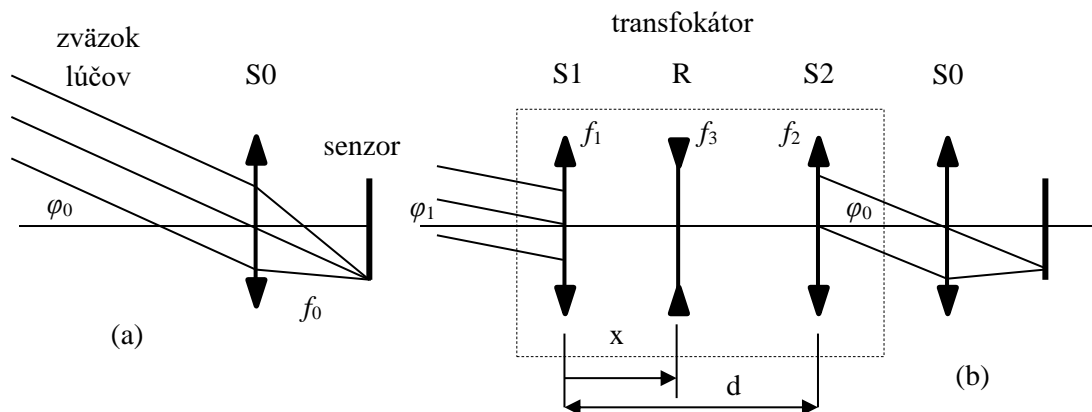
Obr. A-2

- Prekreslite obrázok a vyznačte v ňom vektory všetkých síl, ktoré pôsobia na rám s telieskom v stave rovnováhy.
- Vyjadrite uhol φ vychýlenia osi rámu v stave rovnováhy ako funkciu posunutia x .
- Po malom vychýlení rámu s telieskom v zvislej rovine rámu a uvoľnení začne rám kmitať okolo rovnovážnej polohy. Vyjadrite periódu T kmitov ako funkciu posunutia x .
- Zostrojte grafy funkcií $\varphi = f_1(x)$ a $T = f_2(x)$ pre hodnoty $d = 30$ cm, $m_1 = 200$ g a $m = 50$ g.

4. Transfokátor (ZOOM)

Často využívanou možnosťou fotoaparátov (kamier) je zmena ohniskovej vzdialenosti objektívu, ktorá sa prejavuje ako zväčšovanie – zmenšovanie rozmerov zobrazovanej oblasti, resp. približovanie – vzdalovanie fotografovaného objektu. Na tento účel sa používa optický transfokátor (známy ako ZOOM). Podstata ZOOMu spočíva v zmene uhlového zväčšenia objektívu, resp. zmena uhlu záberu. Širokouhlý objektív má veľký uhol záberu a používa sa

na fotografovanie blízkych a rozmerných objektov (napr. blízkych a vysokých budov), teleobjektív má uhol záberu malý a používa sa na fotografovanie vzdialených objektov (funguje ako ďalekohľad).



Obr. A-3

Na obr. A-3 (a) je zjednodušená schéma obyčajného objektívu so spojkou, ktorá lúče od vzdialeného predmetu premieta na povrch polovodičového senzora (CCD čip – Charge Coupled Device¹). Uhlový medzný uhol φ_0 zobrazenej scény je tým väčší, čím je menšia ohnisková vzdialenosť f šošovky.

Jednoduchý transfokátor, obr. A-3 (b), tvoria dve spojky S1, S2 a rozptylka R. Vzájomná vzdialenosť d spojok je pevná, rozptylku možno posúvať medzi spojkami. Pri plynulej zmene súradnice x polohy rozptylky sa spojitou mení ohnisková vzdialenosť celého objektívu. Šošovky sú volené tak, aby zväzok rovnobežných lúčov, ktoré vstupujú do transfokátora pod uhlom φ_1 voči optickej osi, vystupoval z transfokátora ako zväzok rovnobežných lúčov pod uhlom φ_0 , pričom pre šošovku S0 nedochádza k prevráteniu predmetu, čo vidno v obrázku.

Uvažujme šošovky transfokátora s ohniskovými vzdialenosťami f_1, f_2 – spojky S1 a S2, a $-f_3$ rozptylka R. Medzné polohy rozptylky R v transfokátore sú pri šošovke S1 (vtedy $x = 0$) alebo pri šošovke S2 ($x = d$). Pri posúvaní rozptylky medzi týmito polohami požadujeme zmenu medzného vstupného uhla φ_1 v pomere $\varphi_{1 \max}/\varphi_{1 \min} = n$ (pri rovnakom výstupnom uhle φ_0).

a) Uvažujte spojku S1 a rozptylku R priložené tesne k sebe, $x = 0$. Určte ohniskovú vzdialenosť f_4 tejto zostavy S1–R. Nakreslite obrázok, v ktorom znázorníte prechod lúčov touto zostavou. Znázorníte graficky spôsob určenia ohniskovej vzdialenosti f_4 .

Potom do vzdialenosti d od zostavy S1–R umiestnite šošovku S2 tak, aby zväzok dopadajúcich rovnobežných lúčov vystupoval zo sústavy opäť ako zväzok rovnobežných lúčov (ako je naznačené na obr. A-3 (b)). Uveďte, podmienky pre hodnoty f_1, f_2, f_3, f_4 a d , aby taká situácia nastala. Nakreslite obrázok a v ňom prechod lúčov touto sústavou.

b) V druhom prípade posunieme rozptylku tesne k šošovke S2 ($x = d$). Určte ohniskovú vzdialenosť f_5 tejto zostavy R–S2.

Potom pred zostavu R–S2 vložte do vzdialenosti d spojku S1 a sústavu usporiadajte tak, aby dopadajúci zväzok rovnobežných lúčov na spojku S1 vychádzal zo sústavy opäť ako

¹ Elektronická polovodičová súčiastka používaná na snímanie obrazovej informácie

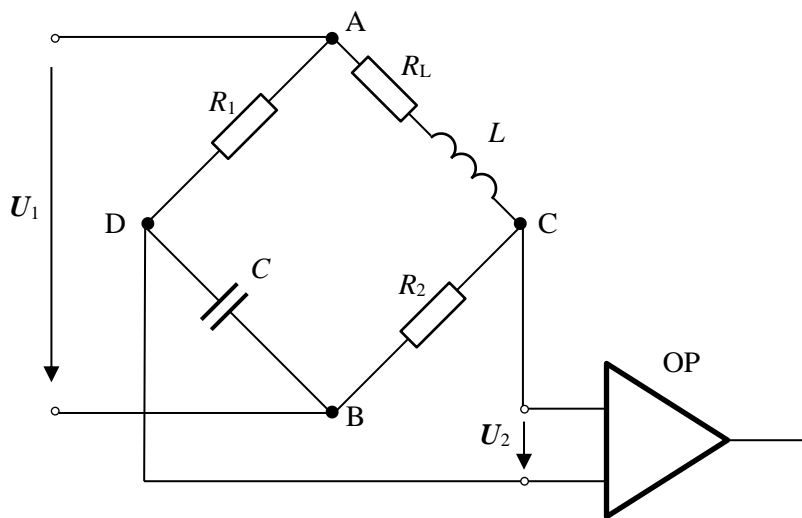
zvázok rovnobežných lúčov. Určte podmienky, ktoré treba v tomto prípade splniť. Nakreslite prechod lúčov sústavou v tomto prípade.

- c) Pre obidve krajné polohy rozptylky R je vzdialenosť d rovnaká. Určte hodnoty ohniskových vzdialeností f_1, f_2, f_3 a vzdialenosti d , aby sa dosiahol pomer $\tan \varphi_{1 \max} / \tan \varphi_{1 \min} = n$ (pri rovnakom medznom výstupnom uhle φ_0).
- d) Určte hodnoty ohniskových vzdialeností f_1, f_2, f_3 pre transfokátor s $d = 4,0$ cm a $n = 3$.

Predpokladajte, že všetky šošovky sú tenké.

5. Elektrický mostíkový filter

Na úpravu frekvenčného spektra signálu použijeme mostíkový filter, obr. A-4, zapojený pred operačným zosilňovačom OP.



Obr. A-4

V mostíku sú zapojené dva rezistory R_1, R_2 , kapacitor C a indukčná cievka s indukčnosťou L a odporom R_L . Uvažujte vstupné napätie $u(t)$ s harmonickou časovou závislosťou s amplitúdou U_1 začiatočnou fázou φ_1 a uhlovou frekvenciou ω . Výstupné napätie $u_2(t)$ má amplitúdu U_2 a začiatočnú fázu φ_2 .

- a) Určte amplitúdovú frekvenčnú charakteristiku $A(\omega) = U_2/U_1$ napät'ového prenosu U_2/U_1 filtra.
- b) Určte fázovú frekvenčnú charakteristiku $\Delta\varphi(\omega) = \varphi_2 - \varphi_1$ napät'ového prenosu filtra.
- c) Zostrojte grafy funkcií $A(f)$ a $\Delta\varphi(f)$, kde f je frekvencia napätia, pre hodnoty súčiastok obvodu $R_1 = 1,0$ k Ω , $R_2 = 1,5$ k Ω , $R_L = 20$ Ω , $L = 25$ mH, $C = 100$ nF. V grafoch použite logaritmickú stupnicu frekvencie, veľkosť amplitúdového prenosu v jednotkách dB (decibel) a fázový rozdiel v jednotkách rad (radián). Pomocou grafov určte rezonančnú frekvenciu f_0 filtra a šírku Δf prenášaného pásma zodpovedajúcu poklesu veľkosti napät'ového prenosu z maximálnej hodnoty o 3 dB.

Vstupný odpor OP je veľmi veľký. Pri riešení použite metódu komplexných veličín (fázorov). Grafy zostrojte pomocou vhodného grafického počítačového programu.

6. Rb–Sr datovanie nerastov

Pre datovanie veku hornín, ktoré vznikli kryštalizáciou z pôvodnej taveniny s obsahom vápnika a draslíka sa používa Rb–Sr (rubídium–stroncium) metóda. V horninách sa prirodzene vyskytuje stroncium a rubídium. Prírodné rubídium obsahuje 72 % stabilného izotopu ^{85}Rb a 28 % rádioaktívneho izotopu ^{87}Rb . Prírodné stroncium obsahuje iba stabilné izotopy ^{86}Sr (10 %), ^{87}Sr (7 %), ^{88}Sr (83 %). Metóda datovania využíva rádioaktívnu premenu ^{87}Rb na ^{87}Sr .

- Uveďte zloženie jadier izotopov ^{86}Sr , ^{87}Sr , ^{87}Rb , ^{39}K , ^{40}Ca .
- Napíšte rovnicu premeny $^{87}\text{Rb} \rightarrow ^{87}\text{Sr}$ a uveďte, o akú premenu ide. V tabuľkách alebo na internete zistite polčas T tejto premeny.

Určovanie absolútneho obsahu jednotlivých izotopov je problematické, využíva sa preto určovanie pomerného zastúpenia izotopov, ktoré možno určiť pomocou hmotnostného spektrometra. Ako porovnávací izotop sa používa izotop ^{86}Sr , ktorý nie je rádiogénny (nevzniká ako produkt rádioaktívnej premeny) a nie je rádioaktívny (nedochádza k jeho rádioaktívnej premene). Pôvodná koncentrácia v skúmanej vzorke materiálu sa s časom nemení.

Stroncium je chemicky blízke vápniku a je v tavenine hornín dobre rozpustné. Ak vzniknú rôzne minerály kryštalizáciou z jednej taveniny, majú všetky vzorky rovnaký začiatočný pomer $(^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr})_0$. Rubídium je chemicky podobné draslíku a v tavenine je málo rozpustné. Viaže sa preto rôznou mierou na rôzne minerály vznikajúce kryštalizáciou z taveniny.

- Vyhľadajte prvky K, Rb, Ca, Sr a vysvetlite príčinu ich chemickej podobnosti.

Rôzne vzorky horniny majú preto iný začiatočný pomer $(^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr})$. Od okamihu vzniku vyvretej horniny sa obsah ^{87}Rb znižuje s polčasom premeny T a obsah ^{87}Sr tým narastá.

- Napíšte rovnicu, ktorá vyjadruje závislosť pomeru $y = (^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr})_t$ od pomeru $x = (^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr})_t$ pre rôzne vzorky tej istej vyvretej horniny v čase t od jej vzniku – *rovnicu izochróny*.
- Pre päť vzoriek rôznych minerálov odobraných z určitej vulkanickej horniny sa pomocou hmotnostného spektrometra zistili pomery

Vzorka	$(^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr})$	$(^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr})$
V1	3,1 %	7,02 %
V2	9,2 %	7,05 %
V3	17,2 %	7,09 %
V4	19,8 %	7,10 %
V5	23,0 %	7,12 %

Zostrojte graf izochróny pre hodnoty v tabuľke. Z grafu určte vek t horniny od okamihu jej vzniku tuhnutím tekutej taveniny (magmy) a začiatočný pomer $(^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr})_0$ v hornine v dobe jej vzniku.

Pozn.: Veličiny $(^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr})$ a $(^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr})$ predstavujú pomery počtov príslušných nuklidov vo vzorke.

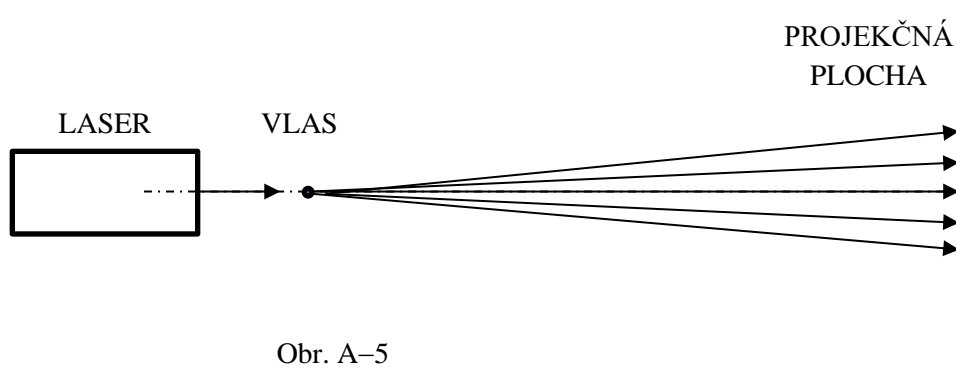
7. Meranie hrúbky vlasu – experimentálna úloha

Metódy merania dĺžky závisia od hodnoty meranej veličiny a požadovanej presnosti. Na meranie bežných dĺžok používame dĺžkové meradlá, ako sú pásmo, pravítko, posuvné meradlo, mikrometer a pod. Na meranie veľkých vzdialeností sa používajú napr. optické metódy.

Pri meraniach veľmi malých vzdialeností alebo rozmerov sa s výhodou využívajú vlnové metódy založené na interferencii a difrakcii vlnenia. Rozlišovacia schopnosť vlnových zobrazovacích metód, ktorá je určujúca pre presnosť merania, je približne daná polovicou vlnovej dĺžky. Úlohou je zmerať priemer vlasu, ktorý je niekoľko desiatok μm . V tomto prípade je vhodné použiť viditeľné svetlo, ktoré poskytuje dostatočnú rozlišovaciu schopnosť.

a) Skúste zmerať priemer ľudského vlasu posuvným meradlom a mikrometrom. Zhodnoťte tento spôsob merania a odhadnite chybu merania.

Vlnová metóda merania je založená na difrakcii svetla na vlákne.



Meranie usporiadajte podľa obr. A-5. Do vhodného držiaka upevníte laser (laserové ukazovadlo s červeným svetlom s vlnovou dĺžkou 650 nm) tak, aby bol laserový lúč vodorovný a smeroval na bielu stenu vo vzdialenosti niekoľko metrov. Do laserového vložte kolmo na lúč meraný vlas, upevnený v druhom držiaku. Na stene (projekčnej ploche) sa objaví difrakčný obrazec, pozostávajúci zo série striedajúcich sa maxim a minim intenzity osvetlenia.

- b) Vysvetlite podstatu difrakcie svetla na tenkom vlákne a odvodte vzťah pre uhlovú vzdialenosť susedných maxim v difrakčnom obraze.
- c) Zmerajte čo najpresnejšie potrebné dĺžky a určte priemer vlasu.
- d) Meranie opakujte s inými tenkými vláknami, napr. chl p mačky alebo psa, tenká niť a pod.
- e) Zhodnoťte presnosť merania touto difrakčnou metódou.