

59. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2017/2018
Kategória A – krajské kolo
6. 2. 2018

Riešenie úloh

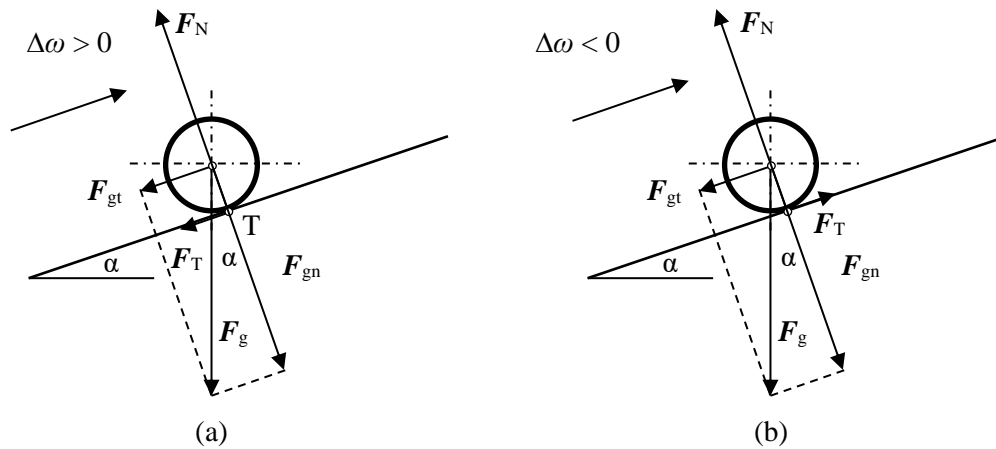
1. Loptička na minigolfovej prekážke

Riešenie:

- a) Keď sa loptička uvedie do postupného pohybu bez začiatočnej rotácie, šmýka sa smerom nahor a účinkom sily trenia smerujúcej nadol v smere osi rúry rastie jej uhlová rýchlosť ω a klesá rýchlosť v jej hmotného streda, obr. RA–1 (a).

Po dosiahnutí podmienky $v = \omega r$ rýchlosť v ďalej klesá, a preto klesá aj uhlová rýchlosť ω , čo znamená, sila trenia medzi loptičkou a rúrou zmení smer na opačný, obr. RA–1 (b). Môžu nastať dva prípady: (1) loptička prejde do valivého pohybu alebo (2) bude sa naďalej prešmykovať. Ktorý prípad nastane závisí od uhla α a faktora trenia f . Ak sa loptička v rúre zastaví, pohybuje sa nazad k dolnému koncu, pričom v prípade (1) ide o valivý pohyb a v prípade (2) sa prešmykuje.

1 b



Obr. RA–1

2 b

- b) V prvej časti pohybu sa loptička prešmykuje, tzn. v bode dotyku T pôsobí na loptičku sila šmykového trenia $F_T = f F_N$. Rovnice postupného a rotačného pohybu okolo osi loptičky sú

$$m a = - F_g \sin \alpha - F_T \quad (1)$$

$$I \varepsilon = r F_T. \quad (2)$$

Po dosadení za jednotlivé sily do výrazov (1), (2) vyjadríme zrýchlenia

$$a = - g \sin \alpha - f g \cos \alpha$$

$$r \varepsilon = \frac{5}{2} f g \cos \alpha.$$

Pre rýchlosť v postupného pohybu a obvodovú rýchlosť ωr loptičky máme

$$v = v_0 + a t = v_0 - (\tan \alpha + f) g t \cos \alpha \quad (3)$$

$$r \omega = r \varepsilon t = \frac{5}{2} f g t \cos \alpha .$$

Rýchlosť $v_1 = r \omega_1$ dosiahne loptička v čase

$$t_1 = \frac{v_0}{g \cos \alpha} \frac{1}{\tan \alpha + \frac{7}{2} f} . \quad (4)$$

Dráha loptičky do okamihu t_1

$$l_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 = \frac{2 v_0^2}{g \cos \alpha} \frac{\tan \alpha + 6 f}{(2 \tan \alpha + 7 f)^2} .$$

Túto dráhu loptička prejde, a rýchlosť $v_1 = r \omega_1$ dosiahne, ak $l_1 \leq l$.

Pre dané hodnoty a pre $\alpha_1 = 20^\circ$ máme $l_1 \approx 95$ cm, pre $\alpha_2 = 30^\circ$ je $l_1 \approx 77$ cm. 2 b

Ďalší pohyb závisí od toho, či sa loptička po povrchu odvaľuje bez preklzavania (1) alebo či sa prešmykuje (2).

Uvažujme prvý prípad valivého pohybu. V tomto prípade ide o statické trenie dané podmienkou $F_T \leq f F_N$ a platí vzťah $v = r \omega$, resp. $a = r \varepsilon$. Pohybové rovnice sú

$$m a = -F_g \sin \alpha + F_T$$

$$I \varepsilon = -r F_T ,$$

odkiaľ máme

$$F_T = \frac{2}{7} F_g \sin \alpha \leq f m g \cos \alpha , \text{ resp. } \tan \alpha \leq \frac{7}{2} f = \tan \alpha_m .$$

Pre $\alpha \leq \alpha_m$ je trenie statické a loptička sa nepreklzáva (valivý pohyb). Pre $\alpha > \alpha_m$ sa loptička na povrchu rúry preklzáva a ide o šmykové trenie. Pre dané hodnoty $\alpha_m \approx 24^\circ$.

1 b

c) Začiatková rýchlosť v_1 druhej časti pohybu je daná vzťahom (3) a pre čas (4) má hodnotu

$$v_1 = \frac{5 f}{2 \tan \alpha + 7 f} v_0 .$$

Loptička sa pohybuje spomaleným pohybom až k hornému koncu rúry. Medzný prípad predpokladá prekonanie dráhy $l - l_1$ s nulovou konečnou rýchlosťou.

(1) Pri valivom pohybe nedochádza k stratám mechanickej energie, preto zmena kinetickej energie $\Delta E_k = -\left(\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} I \omega_1^2\right)$ je rovná úbytku potenciálnej energie $-\Delta E_p = -m g (l - l_1) \sin \alpha_1$. Z rovnosti $\Delta E_k = -\Delta E_p$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} I \left(\frac{v_1}{r}\right)^2 = m g (l - l_1) \sin \alpha_1$$

určíme začiatkovú rýchlosť loptičky

$$v_{01} = \sqrt{2 l g \sin \alpha_1 \frac{(2 \tan \alpha_1 + 7 f)^2}{35 f^2 + 2(2 \tan \alpha_1 + 12 f) \tan \alpha_1}} .$$

Pre dané hodnoty $v_{01} \approx 3,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

2 b

Pozn.: Pri začiatkovej rýchlosti $v_0 = 3,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ by loptička horný koniec rúry nedosiahla.

(2) Pre $\alpha_2 > \alpha_m$ pokračuje loptička so zrýchlením

$$a = -g \cos \alpha_2 (\tan \alpha_2 - f) .$$

Pre začiatočnú rýchlosť v_1 a dráhu do zastavenia $l - l_1$ máme

$$v_1^2 = 2(-a)(l - l_1).$$

Po dosadení

$$v_{01} = \sqrt{2l g \cos \alpha_2 \frac{(2 \tan \alpha_2 + 7f)^2 (\tan \alpha_2 - f)}{25 f^2 + 4(\tan \alpha_2 + 6f)(\tan \alpha_2 - f)}}.$$

Pre dané hodnoty $v_{01} \approx 4,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

2 b

2. Kmity

Riešenie:

- a) Ak v stave rovnováhy vychýlime guľôčku o x v zvislom smere, pôsobí na ňu sila deformovanej pružiny $F = -kx$. Pohybová rovnica $ma = -kx$ má harmonické riešenie.

Pre $m = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$ perióda harmonických kmitov

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 4\pi r \sqrt{\frac{\pi \rho r}{3k}}.$$

Pre dané hodnoty: $T_0 \approx 0,33 \text{ s}$.

1 b

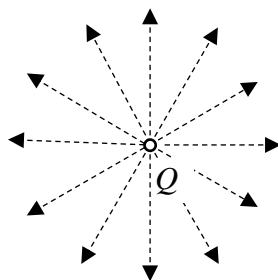
- b) Na povrchu vodivej gule s polomerom r a nábojom Q je intenzita elektrostatičkého poľa

$$E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \text{ odkiaľ } Q_m = 4\pi \epsilon_0 r^2 E_p.$$

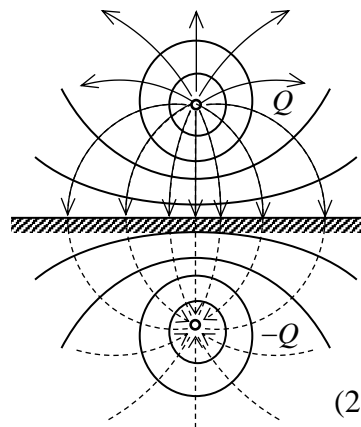
Pre dané hodnoty $Q_m \approx 8,4 \text{ nC}$.

1 b

- c) Ak je guľôčka izolovaná, jej elektrické pole je radiálne, siločiaru sú priamky kolmé na povrch gule, obr. RA-2 (1).



(1) - 1 b



(2) - 2 b

Obr. RA-2

Keď podložíme pod guľôčku vodivú dosku, elektrické pole guľôčky sa zdeformuje (vplyvom elektrostatickej indukcie náboja v doske) tak, že na povrchu dosky vektor elektrickej intenzity i siločiar budú kolmé k povrchu dosky (povrch dosky je ekvipotenciálna plocha). Ak hypoteticky vytvoríme zrkadlový obraz poľa siločiar druhou guľôčkou s opačným nábojom vo vzdialenosti a pod doskou a dosku odstránime, má pole nad rovinou pôvodného povrchu dosky rovnaké rozloženie. Sústavu zelektrizovanej častice s nábojom Q a vodivej dosky možno nahradiť dvojicou častíc s opačnými nábojmi Q a $-Q$ usporiadanou zrkadlovo vzhľadom na rovinu povrchu vodivej dosky. Opísaný postup nazývame – *metóda zrkadlenia*, obr. RA–2 (2). 2 b

- d) Podloženie vodivej dosky do vzdialenosti a pod guľôčku je ekvivalentné umiestneniu zrkadlovej guľôčky s opačným nábojom do vzdialenosti $2a$ pod pôvodnú guľôčku. Na zavesenú guľôčku tak pôsobí elektrická sila smerom nadol

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{(2a)^2}.$$

Pre dané hodnoty $F_e \approx 1,4 \mu\text{N}$.

Táto sila predstavuje posunutie guľôčky smerom nadol $\Delta x = F_e/k \approx 2,8 \mu\text{m}$. 1 b

Meracím zariadením s rozlíšením $\Delta x_{\min} = 10 \mu\text{m}$ túto zmenu nemôžeme zmerať. 1 b

- e) Ak vychýlime guľôčku v zvislom smere o $x \ll a$, môžeme elektrickú silu vyjadriť približnou lineárnou závislosťou od výchylky

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{4(a+x)^2} = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 a^2} \frac{1}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^2} \approx \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 a^2} \left(1-2\frac{x}{a}\right) = F_{e0} - k_e x,$$

kde $F_{e0} = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 a^2}$, $k_e = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a^3}$. Pre dané hodnoty $F_{e0} \approx 1,4 \mu\text{N}$, $k_e \approx 28 \mu\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$,

tzn. $k_e \ll k$.

Zvislá zložka elektrickej sily sa skladá so silou pružiny, tzn. výsledná tuhosť $k^* = k + k_e$, a perióda kmitov

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k+k_e}} = T_0 \sqrt{\frac{1}{1+k_e/k}} \approx T_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k_e}{k}\right) = T_0 + \Delta T.$$

Relatívna zmena periódy kmitov

$$\delta T = \frac{\Delta T}{T_0} = -\frac{k_e}{2k} = -\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 a^3 k}. \text{ Pre dané hodnoty } \delta T \approx -2,8 \times 10^{-5}. \quad 1 \text{ b}$$

Zariadením s relatívnou presnosťou $\delta T = 10^{-8}$ možno presne zmerať zmenu periódy spôsobenú podložením vodivej dosky.

3. Vysokofrekvenčné vlastnosti rezistora

Riešenie:

a) Impedancia dvojpólu na obr. A-2

$$Y = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\omega \left[C - \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2} \right].$$

Podmienka nulovej imaginárnej časti admitancie je

$$C - \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2} = 0, \text{ odkiaľ máme } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} = \sqrt{\frac{1}{LC}} \sqrt{1 - \frac{CR^2}{L}} = 2\pi f_0.$$

Podmienka existencie rezonančnej frekvencie je $R < \sqrt{\frac{L}{C}} = R_0$, 1 b

kde R_0 predstavuje tzv. charakteristický odpor dvojpólu, pre dané hodnoty $R_0 \approx 820 \Omega$.

Pre dané hodnoty $f_0 \approx 44 \text{ MHz}$. 2 b

b) Pre $\omega > \omega_0$, imaginárna časť admitancie je kladná, dvojpól má kapacitné vlastnosti. Pre veľmi vysoké frekvencie $\omega \gg R/L$ klesá reálna časť i záporná zložka imaginárnej časti admitancie k nule a dvojpól má vlastnosti čistého kapacitora s kapacitou C . Pre $R > R_0$, dvojpól má kapacitné vlastnosti nezávislé od frekvencie.

Ak je splnená podmienka rezonancie $R < R_0$ a platí $\omega < \omega_0$, imaginárna časť admitancie je záporná, dvojpól má induktívne vlastnosti.

Ak je splnená podmienka rezonancie $R < R_0$ a platí $\omega \ll \omega_0$, imaginárna časť admitancie sa blíži k nule a reálna časť k hodnote $1/R$, dvojpól má vlastnosti ideálneho rezistora.

Pozn.: Aby sa v praxi rezistory správali ako ideálne, vhodným konštrukčným riešením indukčnosť rezistora sa obmedzuje na minimum napr. bifilárnym vinutím odporového vlákna alebo objemovým usporiadaním, najmä v prípade rezistorov s vysokými hodnotami odporu. 2 b

c) Fázorový diagram pre daný prípad je na obr. RA-3.

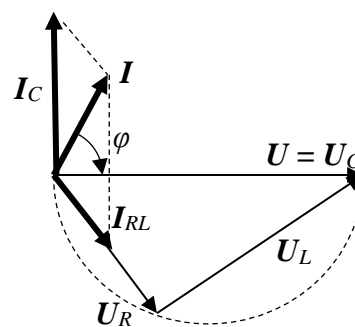
$U^2 = U_R^2 + U_L^2$ - pravouhlý trojuholník na Tálesovej kružnici. Pomer odvesien

$$\frac{U_L}{U_R} = \frac{\omega L}{R} \approx 1,7.$$

Pomer prúdov

$$\frac{I_C}{I_{RL}} = \omega C \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \approx 1,8.$$

Fázor prúdu I_{RL} má smer fázora U_R a fázor prúdu I_C zvierá s fázorom napätia zdroja U uhol 90° .



Obr. RA-3 2 b

Fázový rozdiel medzi napätím s prúdom je argument komplexnej impedancie

$$\frac{U}{I} = Z = \frac{1}{Y}$$

Fázový rozdiel medzi napätím a prúdom

$$\varphi = -\arctan \frac{\operatorname{Im} Y}{\operatorname{Re} Y} = -\arctan \frac{\omega(CR^2 + \omega^2 CL^2 - L)}{R}.$$

Pre dané hodnoty $\varphi \approx -60,5^\circ$.

Výsledok potvrdzuje skutočnosť, že pre $f > f_0$ má dvojpól kapacitné vlastnosti. 1 b

d) Prúd rezistorom R

$$I_{RL} = \frac{U}{R + j\omega L}.$$

Činný výkon zdroja je rovný elektrickému výkonu rezistora

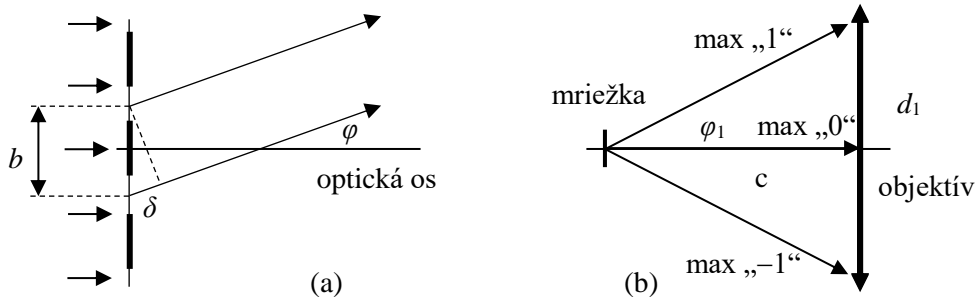
$$P = R I_{RL}^2 = U^2 \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2}. \text{ Pre dané hodnoty } P \approx 63 \text{ mW}. \quad 2 \text{ b}$$

Druhá možnosť výpočtu je $P = UI \cos \varphi$ s rovnakým výsledkom.

4. Optika

Riešenie:

a) Na obr. RA-4 (a) je znázornený prechod lúčov svetla mriežkou.



Obr. RA-4

2 b

b) Lúče prechádzajúce susednými medzerami v mriežke postupujúce pod uhlom φ voči optickej osi majú rozdielnu optickú (geometrickú) dráhu, obr. RA-4(a). Prvé maximum (1 a -1) pozorujeme pod uhlom φ_1 a $-\varphi_1$. Podmienka prvého difrakčného maxima

$$\delta = b \sin \varphi_1 = \lambda, \text{ odkiaľ máme } \varphi_1 = \arcsin \frac{\lambda}{b}. \text{ Pre dané hodnoty } \varphi_1 \approx 26^\circ. \quad 1 \text{ b}$$

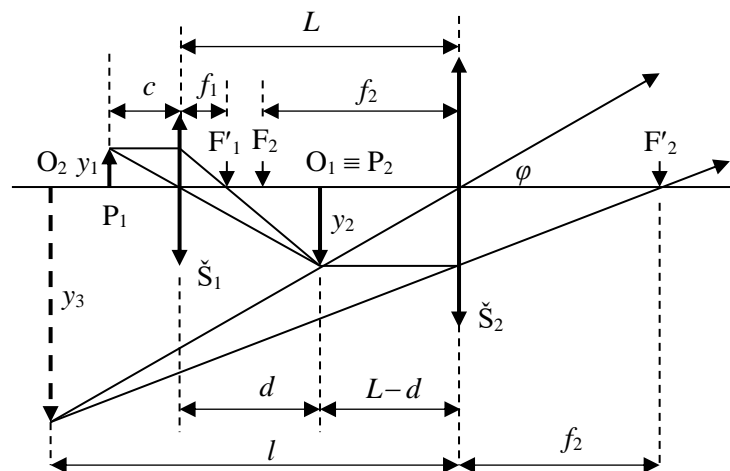
Aby objektív zachytil všetky tri difrakčné maximá, musí byť jeho vzdialenosť od mriežky, obr. RA-4 (b)

$$c < \frac{d_1}{2 \tan \varphi_1} = c_{\max}. \text{ Pre dané hodnoty } c_{\max} \approx 10,3 \text{ mm}. \quad 1 \text{ b}$$

Ak by bola vzdialenosť $c > c_{\max}$, objektív by zachytil iba hlavné maximum, ktoré neobsahuje informáciu o periodicite mriežky. 1 b

Pozn.: Keďže uhol φ_1 nemôže byť príliš veľký, medzná hodnota je okolo 45° , je minimálna pozorovateľná perióda mriežky 740 nm, čo určuje rozlišovaciu schopnosť mikroskopu.

c) Na obr. RA-5 je znázornený chod lúčov sústavou mikroskopu.



Obr. RA-5

1 b

Predmet P_1 (mriežka) sa nachádza vo vzdialenosti c od šošovky \check{S}_1 objektívu. Obraz O_1 sa vytvorí šošovkou \check{S}_1 vo vzdialenosti d . Zobrazovacia rovnica má tvar

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f_1}.$$

Obraz O_1 je predmetom P_2 pre šošovku \check{S}_2 okuláru. Predmetová vzdialenosť je $L - d$. Pre zdanlivý obraz O_2 je obrazová vzdialenosť $-l$. Zobrazovacia rovnica okuláru je

$$\frac{1}{L-d} - \frac{1}{l} = \frac{1}{f_2}.$$

Z týchto rovníc vyjadríme predmetovú vzdialenosť objektívu od mriežky

$$c = f_1 \frac{(l-L)f_2 - Ll}{f_1(f_2 + l) + (l-L)f_2 - Ll}. \text{ Pre dané hodnoty } c \approx 6,4 \text{ mm.} \quad 1 \text{ b}$$

Táto vzdialenosť spĺňa podmienku $c < c_{\max}$.

d) Z obr. RA-5 máme

$$\tan \varphi = \frac{y_3}{l} = \frac{y_2}{L-d} \approx \varphi.$$

Pri priamom pozorovaní je zorný uhol zo vzdialenosti l

$$\tan \varphi_0 = \frac{y_1}{l} \approx \varphi_0.$$

Uhlové zväčšenie

$$z = \frac{\varphi}{\varphi_0} = \frac{y_3}{y_1} = \frac{y_3}{y_2} \frac{y_2}{y_1} = \frac{l}{L-d} \frac{d-f_1}{f_1}.$$

Z druhej zobrazovacej rovnice určíme

$$d = L - \frac{l f_2}{l + f_2}$$

a dosadíme do vzťahu pre zväčšenie a upravíme na tvar

$$z = \frac{l}{f_1} \left[(L - f_1) \frac{l + f_2}{l f_2} - 1 \right].$$

Pre dané hodnoty $z \approx 82,3$. 1 b

$$\varphi_0 \approx (1,20 \times 10^{-6} \text{ m}) / (0,25 \text{ m}) \approx 0,017'.$$

$$\varphi \approx \varphi_0 z \approx 1,4'. \quad 1 \text{ b}$$

Z výsledku je zrejmé, že priamym pozorovaním voľným okom nie sme schopní mriežku vidieť, ale pri použití daného mikroskopu mriežku uvidíme. Mikroskop s danými parametrami spĺňa jednak difrakčnú podmienku, jednak poskytuje dostatočné zväčšenie na pozorovanie jemnej mriežky s periódou $1,2 \mu\text{m}$. 1 b

59. ročník Fyzikálnej olympiády – Úlohy krajského kola kategórie A

Autori úloh:	Ľubomír Konrád 1, Ivo Čáp 2 – 4
Recenzia a úprava úloh:	Daniel Klivanec, Ľubomír Mucha
Redakcia:	Ivo Čáp
	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017