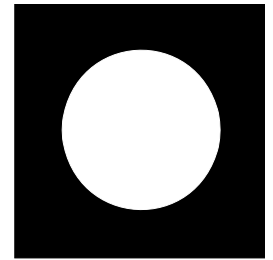


The 43rd International Physics Olympiad — Theoretical Competition

Tartu, Estonia — Tuesday, July 17th 2012

- Súťaž trvá 5 hodín. Riešite 3 úlohy hodnotené celkove 30 bodmi. Úlohy nemajú rovnakú bodovú hodnotu.
- **Neotvárajte obálku s úlohami pred zaznením signálu oznamujúceho začiatok súťaže (tri krátke signály).**
- **Nie je dovolené opustiť pracovné miesto bez dovolenia.** Ak potrebujete pomoc (pokazená kalkulačka, odísť na záchod a pod.), zodvihnite príslušnú vlajočku "HELP" alebo "TOILET" s dlhou rúčkou na vašom mieste) nad stenu vášho miesta a držte ju kým niekto z organizátorov nepríde.
- **Vaše výsledky musí byť vyjadrené pomocou veličín, ktoré sú zvýraznené v texte úlohy .** Takže, ak je napísané "hranol s výškou a a šírkou b ", potom zvýraznené a môže byť použité vo výsledku ale nezvýraznené b nemôže byť použité (iba ak je zvýraznené niekde inde - pozri nižšie). Veličiny zvýraznené v niektorej podotázke môžu byť použité iba vo výsledku danej podotázky. Veličiny zvýraznené v úvodnom texte danej úlohy (alebo príslušnej časti tejto úlohy), tzn. mimo rozsah podotázky, môžu byť použité vo všetkých výsledkoch danej úlohy (alebo príslušnej časti tejto úlohy). Všeobecné konštanty možno použiť bez obmedzenia.
- Používajte iba **jednu** stranu každého papiera.
- Na zápis riešenia každej úlohy máte dodané **Solution Sheets - hárky na čistopis** (pozrite si záhlavie s číslom a piktogramom). Svoje výsledky zapisujte do príslušných odpovedových hárkov. Solution Sheets sú číslované pre každú úlohu; používajte hárky podľa ich v poradí označeného číslovania. Vždy vyznačte o ktorú časť (Part) a otázku (Question) ide. Výsledky potom prepíšte do príslušných rámkov v **Answer Sheets** – odpovedových hárkoch. K dispozícii máte aj papiere na nečistopis - **Draft papers**. Tie používajte na veci, ktoré nemajú byť hodnotené. Ak zapíšete niečo, čo nemá byť hodnotené, do hárkov **Solution Sheets**, (ako napr. prvý náčrt riešenia alebo chybné riešenie), toto krížom prečiarknite
- Ak potrebujete na riešenie určitej úlohy viac papierov, zodvihnite vlajočku "HELP" a oznámte organizátorovi číslo úlohy; dostanete dva ďalšie Solution sheets (túto žiadosť môžete viackrát opakovať)
- **Používajte čo najmenej textu:** svoje riešenie vysvetľujte hlavne rovnicami, číslami symbolmi a grafmi.
- Prvý krátky zvukový signál oznamuje, že zostáva ešte 30 minút na riešenie, druhý dvojité signál oznamuje zostávajúcich 5 minút, tretí trojitý signál oznamuje koniec riešenia. **Po zaznení tretieho signálu musíte okamžite prestať písať!** Vložte všetky papiere do obálky na stole. **Nie je dovolené odnášať akýkoľvek hárak papiera z miestnosti!** Ak ukončíte riešenie pred zaznením konečného signálu, zodvihnite vašu vlajočku.



Problem T1. Úlohy zamerané na náčrty (13 bodov)

Part A. Ballistics - Balistika (4.5 bodu)

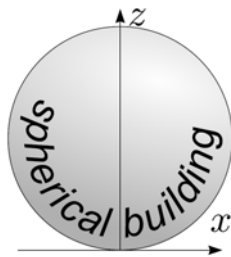
Loptička hodená počiatčnou rýchlosťou v_0 sa pohybuje v homogénnom gravitačnom poli v rovine x - z . Os x je vodorovná os a z je zvislá s opačnou orientáciou, ako má gravitačné zrýchlenie g ; odpor vzduchu neuvažujte.

i. (0.8 bodu) Keď budeme meniť uhol hodu, pod ktorým hádzeme loptičku zo začiatku súradnicovej sústavy v rovine x - z s počiatčnou rýchlosťou v_0 , zasiahneme cieľ v oblasti, ktorá je opísaná nerovnicou

$$z \leq z_0 - kx^2;$$

tento fakt berte do úvahy, ale nemusíte ho dokazovať. Určte konštanty z_0 a k .

ii. (1.2 bodu) Teraz môžeme meniť uhol hodu a aj polohu bodu hodu vo vodorovnej rovine $z = 0$. Naším cieľom je zasiahnuť najvyšší bod budovy tvaru gule s polomerom R (viď obrázok) s najmenšou možnou počiatčnou rýchlosťou v_0 . Na zasiahnutie cieľa nie sú povolené odrazy od podlahy a od budovy. Načrtnite kvalitatívne tvar optimálnej trajektórie loptičky, pričom pri náčrte uvažujte fyzikálne riešenie problému, no nie s absolútnou presnosťou. Náčrtok urobte do príslušného rámika v Odpovedovom hárku. Body sú iba za náčrt a nie za výpočet.



iii. (2.5 bodu) Určte najmenšiu rýchlosť v_{\min} , ktorou zasiahnete najvyšší bod guľovej budovy polomeru R !



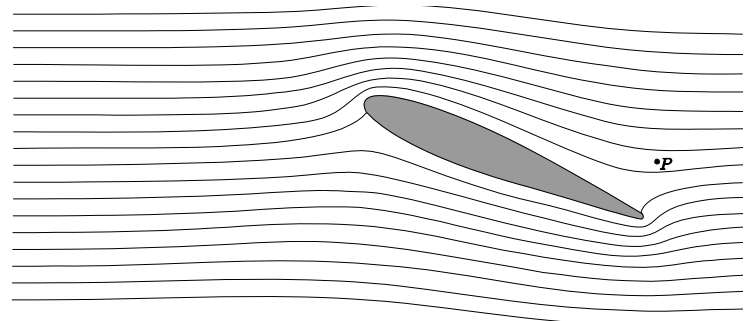
La Géode, Parc de la Villette, Paris. Photo: katchoo/flickr.com

Part B. Air flow around a wing (4 points)

Prúdenie vzduchu okolo krídla

V tejto časti možno využiť nasledujúce informácie. Pre kvapaliny alebo plyny (tekutiny) prúdiace v trubici platí pozdĺž prúdočiary (prúdnice) $\rho + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{konšt.}$, ak je rýchlosť v oveľa menšia ako rýchlosť zvuku; ρ je hustota, h výška, g tiažové zrýchlenie, p aero(hydro)statický tlak. Prúdnice sú definované ako trajektórie častíc tekutiny (za predpokladu stacionárneho prúdenia). Výraz $(1/2) \rho v^2$ sa nazýva dynamický tlak.

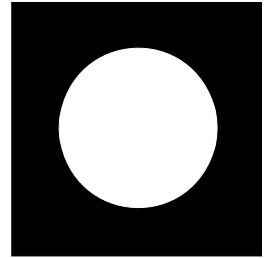
Na obrázku nižšie je priečný rez krídla lietadla spolu s prúdnicami prúdenia vzduchu okolo krídla vzhľadom na súradnicovú sústavu spojenú s krídlom lietadla. Predpokladajme, že (a) prúdenie vzduchu je dvojrozmerné (vektory rýchlosti vzduchu ležia v rovine obrázku); (b) tvar prúdnice nezávisí od rýchlosti lietadla; (c) nefúka vietor; (d) dynamický tlak je oveľa menší ako atmosférický $p_0 = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$. Použite pravítko na získanie hodnôt z obrázku v Odpovedovom hárku.



i. (0.8 bodu) Ak je rýchlosť lietadla $v_0 = 100 \text{ m/s}$ vzhľadom na zem, aká je rýchlosť vzduchu v_P v bode P vzhľadom na zem (pozri obrázok)?

ii. (1.2 bodu) V prípade, že relatívna vlhkosť vzduchu je veľká a rýchlosť lietadla vzhľadom na zem prekročí kritickú hodnotu v_{crit} , za krídlom lietadla sa vytvorí prúd kvapiek vody. Kvapky sa vytvoria v určitom bode Q . Vyznačte bod Q na obrázku v Odpovedovom hárku. Vysvetlite kvalitatívne, ako ste určili polohu bodu Q (použite na to rovnice a minimálne množstvo textu).

iii. (2.0 body) Vypočítajte kritickú hodnotu rýchlosti v_{crit} s použitím nasledujúcich údajov: relatívna vlhkosť vzduchu $r = 90\%$, tepelná kapacita vzduchu pri konštantnom tlaku $c_p = 1,00 \times 10^3 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$, tlak nasýtených vodných pár je $p_{\text{sa}} = 2,31 \text{ kPa}$ pri teplote $T_a = 293 \text{ K}$ pre neturbulentný (nezvírený) vzduch. Pri teplote $T_b = 294 \text{ K}$ je tlak nasýtených



vodných pár $p_{sb} = 2,46 \text{ kPa}$. V závislosti od vášho postupu môže byť užitočná tepelná kapacita vzduchu pri konštantnom objeme $c_v = 0,717 \times 10^3 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$.

Pozn.: Relatívna vlhkosť je definovaná ako pomer tlaku pary k tlaku nasýtenej pary pri rovnakej teplote. Tlak nasýtenej pary je definovaný ako tlak pary v stave rovnováhy so svojou kvapalnou fázou.

Part C. Magnetic straws (4.5 points)

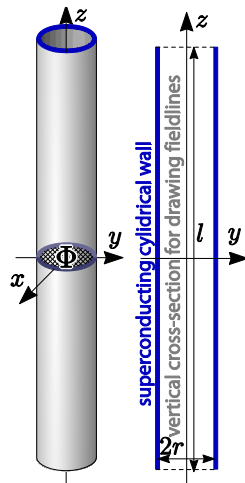
Magnetická slamka

Uvažujte valcovú trubičku vytvorenú zo supravodivého materiálu. Dĺžka trubičky je l a vnútorný polomer r , pričom $l \gg r$. Stred trubičky je totožný so začiatkom súradnicovej sústavy a os trubičky so z osou. Φ je magnetický tok cez vnútorný prierez trubičky pre $z = 0$

$$x^2 + y^2 < r^2.$$

Supravodič je materiál, ktorý "vytláča" akékoľvek magnetické pole (pole vo vnútri materiálu je nulové)

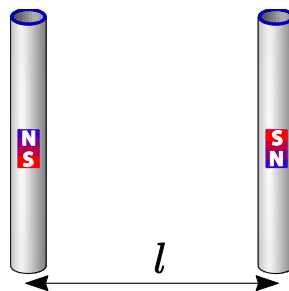
i. (0.8 bodu) Do príslušného rámika odpovedového hárku načrtnite päť magnetických indukčných čiar prechádzajúcich cez päť červených bodov, ktoré sa nachádzajú na priečnej osi trubičky.

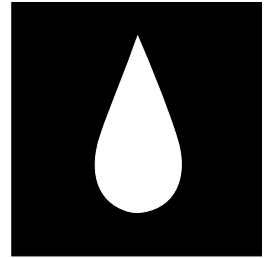


ii. (1.2 bodu) Vypočítajte silu T v smere osi z v strede trubičky, ktorou na seba pôsobia horná polovica a dolná polovica trubičky, $z > 0$ a $z < 0$!

iii. (2.5 bodu) Majme ešte ďalšiu trubičku, rovnakú a rovnobežnú s pôvodnou (viď obrázok).

Magnetické pole vo vnútri druhej trubičky má opačný smer ako v prvej. Poloha stredu druhej trubičky je $y = l, x = z = 0$ (takže trubičky predstavujú protiľahlé strany štvorca). Vypočítajte magnetickú silu F vzájomného pôsobenia medzi obidvomi trubičkami.

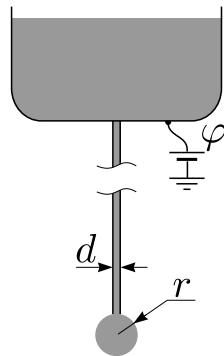




Problem T2. Kelvinovo kvapkadlo (8 points)

V tejto časti môžu byť užitočné nasledujúce informácie. Poloha molekúl na povrchu kvapaliny je menej výhodná ako poloha v jej vnútri. Vyjadruje to povrchová energia kvapaliny $U = \sigma S$, kde S je obsah povrchu a σ povrchové napätie kvapaliny. Ďalej dve časti povrchu kvapaliny na seba pôsobia silou $F = \sigma l$, kde l je dĺžka úsečky rozdeľujúcej tieto časti.

Dlhá tenká kovová trubica s vnútorným priemerom d smeruje zvislo nadol; voda veľmi pomaly vyteká z otvoru na jej dolnom konci, pozri obrázok. Vodu považujeme za elektricky vodivú, jej povrchové napätie je σ a hustota ρ . Predpokladajte $d \ll r$, kde r je polomer kvapky visiacej na konci trubice, ktorý sa pomaly zväčšuje až do okamihu, kedy sa kvapka v dôsledku svojej tiaže od trubice oddelí (tiažové zrýchlenie je g).

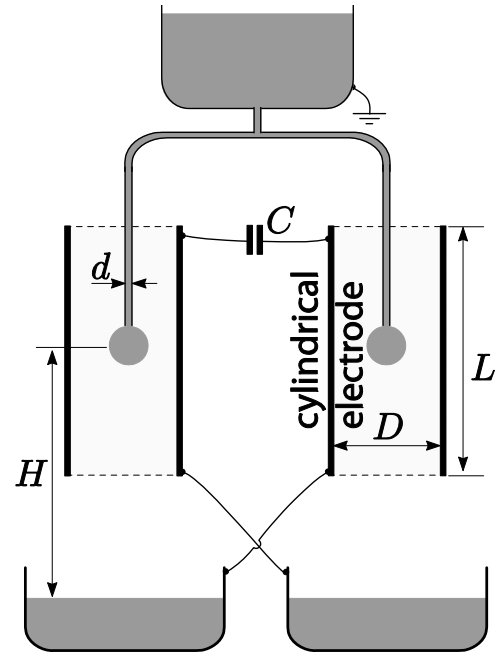


Part A. Jedna trubica (4 points)

- (1.2 pts) Určte polomer r_{\max} kvapky tesne pred jej oddelením od trubice.
- (1.2 pts) Elektrický potenciál trubice vzhľadom na nekonečno je φ . Určte náboj Q kvapky, ak je jej polomer r .
- (1.6 pts) V tejto časti úlohy predpokladajte, že polomer r je konštantný, zatiaľ čo potenciál φ sa pomaly zväčšuje. Kvapka sa stane nestabilnou a rozpadne sa na menšie časti, ak tlak vo vnútri kvapky poklesne pod hodnotu atmosférického tlaku. Určte medznú hodnotu φ_{\max} potenciálu φ , pri ktorej to nastane.
Prvá kvapka, ktorá spadne, má nepatrný náboj, ktorý vyvolá počiatočnú nerovnováhu medzi obidvomi stranami a malý náboj na kondenzátore.

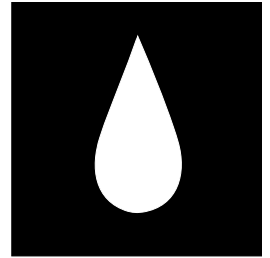
Part B. Dve trubice (4 points)

Zariadenie s názvom "Kelvinovo kvapkadlo" pozostáva z dvoch trubíc (rovnakých ako bolo opísané v predchádzajúcej časti Part A), prepojených pomocou T-spojky, pozri obrázok. Konce obidvoch trubíc sa nachádzajú v stredoch dvoch valcových elektród (s výškou L a priemerom D , $L \gg D \gg r$); u obidvoch trubíc je rýchlosť kvapkania n kvapiek za jednotku času. Kvapky padajú z výšky H do vodivých misiek pod trubícami, križom prepojených s elektródami, ako vidno na obrázku. Elektródy sú vzájomne prepojené kondenzátorom s kapacitou C . Celkový náboj sústavy misiek a elektród je



nulový. Všimnite si v obrázku, že zásobník vody je v tomto prípade uzemnený.

- (1.2 pts) Vyjadrite náboj Q_0 kvapiek, ktoré odkvapkávajú pri hodnote q náboja na kondenzátore, pomocou r_{\max} (podľa Part A-i). Efekt opísaný v Part A-iii neuvažujte.
- (1.5 pts) Vyjadrite závislosť q od času t pomocou spojitých funkcie $q(t)$ za predpokladu $q(0) = q_0$.
- (1.3 pts) Funkciu kvapkadla obmedzuje jav opísaný v časti Part A-iii. Navyše existuje medzné dosiahnuteľné napätie U_{\max} medzi elektródami, ktoré je dané elektrostatickým pôsobením medzi kvapkou a miskou pod ňou. Určte toto napätie U_{\max} .
Pozn.: Prvá kvapka, ktorá spadne, má nepatrný náboj, ktorý vyvolá počiatočnú nerovnováhu medzi obidvomi stranami a malý náboj na kondenzátore.



Problem T3. Vytváranie protohviezdy (9 points)

Uvažujme nasledujúci model vytvárania hviezdy. Guľový oblak riedkeho medzihviezdneho plynu, ktorý bol pôvodne v pokoji, sa začne zmršťovať (kolabovať) v dôsledku vlastnej gravitácie. Hustota okolia oblaku je podstatne menšia ako hustota plynu v oblaku. Začiatkový polomer plynovej guľe je r_0 a hmotnosť m . Teplota okolia a počiatková teplota plynu sú rovnaké a rovné T_0 . Plyn považujte za ideálny. Stredná mólová hmotnosť plynu je μ , adiabatická (Poissonova) konštanta $\gamma > \frac{4}{3}$. Predpokladajte, že $GM\mu / r_0 \gg RT_0$, kde R je mólová plynová konštanta a G je gravitačná konštanta.

i. (0.8 pts) V prvej etape kolapsu je plyn tak priehľadný, že všetko vytvorené teplo sa okamžite vyžiari, tzn. plynová guľa zostáva v termodynamickej rovnováhe so svojím okolím. Koľkokrát (n) sa zväčšil tlak, ak poklesol polomer guľe na polovicu ($r_1 = 0,5r_0$)? Predpokladajte, že plyn v guľi zostáva homogénny.

ii. (1 pt) Odhadnite čas t_2 potrebný na to, aby sa polomer guľe zmenšil z hodnoty r_0 na $r_2 = 0,95 r_0$. Zmenu gravitačného poľa pozdĺž dráhy padajúcej častice plynu neuvažujte.

iii. (2.5 pts) Za predpokladu, že tlak plynu zostáva zanedbateľne malý, určte čas $t_{r \rightarrow 0}$ potrebný na to, aby plyn skolaboval z polomeru r_0 na polomer oveľa menší. Použite Keplerov zákon pre eliptickú trajektóriu.

iv. (1.7 pts) Pri určitom polomere $r_3 \ll r_0$ sa plyn stane dostatočne hustým, aby sa stal nepriepustný pre tepelné žiarenie. Určte množstvo tepla Q vyžiareného počas kolapsu z polomeru r_0 na polomer r_3 .

v. (1 pt) Pre hodnoty polomeru menšie ako r_3 vyžarovanie zanedbajte. Určte, ako závisí teplota T guľe od jej polomeru $r < r_3$.

vi. (2 pts) Na konci už nemožno zanedbať účinky tlaku na dynamiku plynu a kolaps sa zastaví pri $r = r_4$ (pričom $r_4 \ll r_3$). Vyžarovanie je stále zanedbateľné, ale teplota nie je dostatočná na to, aby sa začala nukleárna fúzia. Tlak v takejto protohviezde už síce nie je rozložený rovnomerne, ale napriek tomu určité hrubé odhady možno urobiť. Odhadnite konečnú hodnotu r_4 a zodpovedajúcu teplotu T_4 .