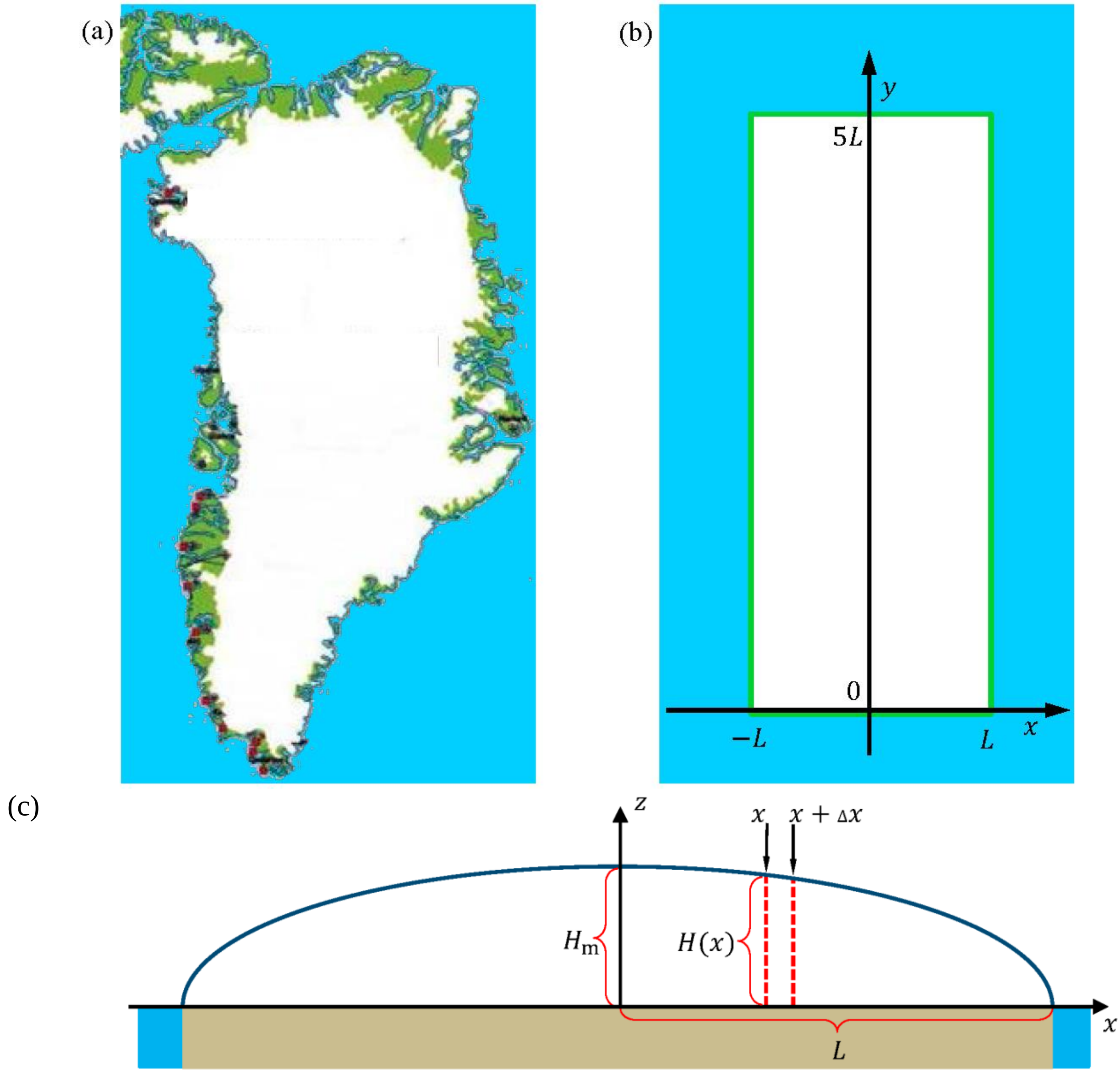
Úvod

Táto úloha pojednáva o fyzikálnych vlastnostiach Grónskeho ľadovca, druhého najväčšieho na svete, obr. 3.1 (a). Ako idealizáciu si predstavíme Grónsko ako pravouhlý ostrov so šírkou $2L$ a dĺžkou $5L$ s podložím na úrovni hladiny mora celkom pokrytým nestlačiteľným ľadom s konštantnou hustotou ρ_{ice}, obr. 3.1 (b). Výškový profil $H(x)$ ľadovej vrstvy nezávisí na súradnici y a narastá od nulovej hodnoty na pobreží $x = \pm L$ po maximálnu výšku H_{m} pozdĺž strednej osi sever–juh (os y) známej ako ľadový predel, obr. 3.1 (c).



Obrázoke 3.1 (a) Mapa Grónska ukazujúca rozsah ľadovej pokrývky (biela), oblastí bez ľadu, pobrežnej obasti (zelená) a okolitého oceánu (modrá). **(b)** Hrubý model Grónskeho ľadovca pokrývajúceho obdĺžnikovú oblasť s šírkou $2L$ a dĺžkou $5L$. Ľadový predel dosahujúci výšku ľadu H_{m} sa ťahá pozdĺž osi y. **(c)** Vertikálny rez v rovine xz ľadovou vrstvou ukazujúci výškový profil $H(x)$ (modrá priamka). $H(x)$ je nezávislé od súradnice y pre $0 < y < 5L$ a prudko klesá k nule pri $y = 0$ a $y = 5L$. Os z označuje miesto ľadového predelu. Pre spresnenie: Mierka v zvislom smere je zväčšená v porovnaní s mierkou vo vodorovnom smere. Hustota ľadu ρ_{ice} je konštantná.

Dva užitočné vzťahy

V tejto úlohe môžete využiť integrál:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

a približný vzťah $(1+x)^a \approx 1+ax$, pre $|ax| \ll 1$.

Výškový profil ľadovej vrstvy

Predpokladajte, že ľadovec je nestlačiteľný hydrostatický systém s daným výškovým profilom $H(x)$.

3.1	Napíšte vzťah pre tlak $p(x,z)$ vo vnútri ľadovej vrstvy ako funkciu zvislej výšky z nad podložím a vzdialenosti x od ľadového predelu. Atmosférický tlak neuvažujte.	0.3

Uvažujte danú zvislú dosku ľadu v stave rovnováhy, pokrývajúcu malú vodorovnú základňu $\Delta x \Delta y$ medzi x a $x+\Delta x$, pozri červené čiarkované čiary v obr. 3.1 (c). Rozmer Δy nie je podstatný. Výsledná vodorovná sila ΔF na vertikálne steny dosky, ktorá má pôvod v rozdielnej výške na strane bližšie k stredu a strane bližšie k pobrežiu, je v rovnováhe so silou trenia $\Delta F = S_b\,\Delta x\,\Delta y$ s podložím na základni $\Delta x \Delta y$, kde $S_b = 100$ kPa.

3.2a	Pre danú hodnotu x ukážte, že pre $\Delta x \to 0$ platí $S_b = kH\,\mathrm{d}H/\mathrm{d}x$, a určte k.	0.9
3.2b	Uveďte vzťah pre závislosť výškového profile $H(x)$ od ρ_{ice}, g, L, S_b a vzdialenosti x od predelu. Výsledok ukazuje, že maximálna výška ľadovca H_m súvisí s polšírkou ostrova L úmerou $H_m \propto L^{1/2}$.	0.8
3.2c	Určte exponent γ, ktorý sa vyskytuje vo vzťahu úmernosti medzi celkovým objemom V_{ice} ľadovej pokrývky a plochou obdĺžnikového ostrova A, $V_{ice} \propto A^{\gamma}$.	0.5

Dynamická ľadová vrstva

Z dlhodobého hľadiska je ľad viskózna nestlačiteľná látka, ktorá sa v dôsledku gravitácie posúva z centrálnej časti smerom k pobrežiu. V tomto modeli sa zachováva výškový profil $H(x)$ v rovnovážnom stave, pričom akumulácia ľadu v centrálnej oblasti v dôsledku padania snehu sa vyrovnáva topením sa ľadu na pobreží. Ku geometrii ľadovej vrstva z obr. 3.1 (b) a (c) uvážte pre tento model predpoklady:

1) Ľad sa posúva rovnobežne s osou x v smere od predelu (y osi).
2) Rýchlosť akumulácie c (m/rok) v centrálnej oblasti je konštantná.
3) Ľad môže opúšťať ľadovec iba roztápaním sa pri pobreží, kde $x = \pm L$.
4) Vodorovná x–zložka $v_x(x) = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ rýchlosti posúvania ľadu nezávisí od z.
5) Vertikálna z–zložka $v_z(z) = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ rýchlosti posúvania ľadu nezávisí od x.

Uvažujte iba centrálnu oblasť $|x| \ll L$ v blízkosti stredu ľadovej vrstvy, v ktorej je zmena výšky vrstvy v smere x veľmi malá a možno ju zanedbať, tzn. $H(x) \approx H_m$.

3.3	S uvážením zachovania hmotnosti odvoďte závislosť rýchlosti horizontálneho posúvania ľadu $v_x(x)$ od c, x a H_m.	0.6

Z predpokladu nestlačiteľnosti, tzn. konštantnej hustoty ρ_{ice} ľadu, vyplýva, že zachovanie hmotnosti vedie k nasledujúcemu obmedzeniu pre zložky rýchlosti posúvania ľadu

$$\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_z}{dz} = 0.$$

3.4	Napíšte vzťah pre závislosť vertikálnej zložky $v_z(z)$ rýchlosti posúvania ľadu od súradnice z.	0.6

Malá častica ľadu s počiatočnou polohou na povrchu (x_i, H_m) sa v priebehu času posúva ako časť ľadovej vrstvy pozdĺž trajektórie posúvania $z(x)$ v zvislej rovine xz.

3.5	Odvoďte vzťah pre túto trajektóriu posúvania častice $z(x)$.	0.9

Dynamická ľadová vrstva ako indikátor klímy a veku

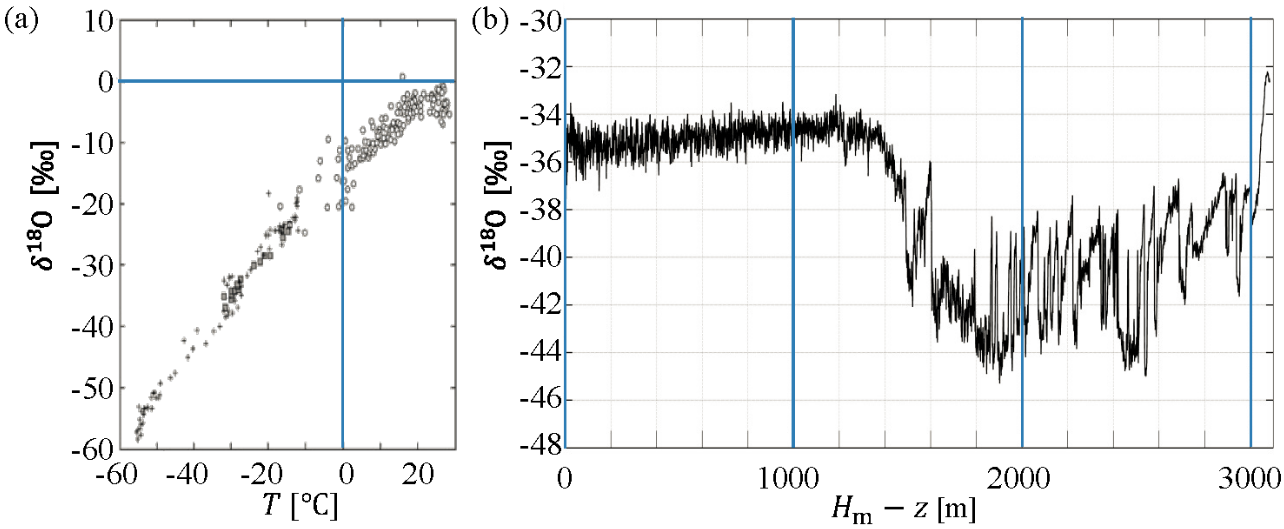
Na základe zložiek rýchlosti pohybu ľadu $v_x(x)$ a $v_z(z)$, možno odhadnúť vek $\tau(z)$ ľadu v konkrétnej hĺbke $(H_\text{m} - z)$ pod povrchom ľadovej vrstvy.

3.6	Uveďte vzťah pre vek $\tau(z)$ ľadu ako funkciu výšky z nad podložím, v rovine predelu $x = 0$.	1.0

Navŕtaním sondy do ľadu Grónskeho ľadovca sa získali vzorky snehu z minulosti a na základe analýzy ľadového jadra sa zisťovali klimatické zmeny v minulosti. Jedným z najlepších indikátorov je tzv. parameter $\delta^{18}\text{O}$, definovaný

$$\delta^{18}\text{O} = \frac{R_\text{ice} - R_\text{ref}}{R_\text{ref}}\, 1000\ ‰,$$

kde $R = [^{18}\text{O}]/[^{16}\text{O}]$ znamená pomer množstva dvoch stabilných izotopov ^{18}O a ^{16}O kyslíka. Referenčná hodnota R_ref je daná izotopickým zložením oceánu v oblasti rovníka.



Obrázok 3.2 (a) Pozorovaný vzťah medzi $\delta^{18}\text{O}$ v snehu a strednou ročnou teplotou na povrchu T.
(b) Meranie $\delta^{18}\text{O}$ v závislosti od hĺbky $(H_\text{m} - z)$ od povrchu, získané z vrtnej sondy od povrchu až po podložie v určitom mieste grónskeho ľadovcového predelu s výškou $H_\text{m} = 3060$ m.

Pozorovania z grónskeho ľadu ukazujú, že $\delta^{18}\mathrm{O}$ sa v snehu mení približne lineárne s teplotou, obr. 3.2 (a). Za predpokladu, že to tak bolo i v minulosti, $\delta^{18}\mathrm{O}$ umožňuje zistiť z jadra vrtu do hĺbky $(H_\mathrm{m} - z)$ odhad teploty T v okolí Grónska vo veku $\tau(z)$.

Meranie $\delta^{18}\mathrm{O}$ v 3060 m dlhom jadre vrtu grónskeho ľadu ukazuje prudkú zmenu $\delta^{18}\mathrm{O}$ v hĺbke 1492 m, obr. 3.2 (b), ktorá znamená koniec poslednej doby ľadovej. Doba ľadová sa začala pred 120,000 rokov, čo zodpovedá hĺbke 3040 m, a súčasná doba medziľadová pred 11,700 rokmi, čo zodpovedá hĺbke 1492 m. Predpokladajte, že tieto dve obdobia možno opísať dvomi rôznymi rýchlosťami akumulácie c_ia (doba ľadová) a c_ig (doba medziľadová). Predpokladajte, že H_m bola konštantná po 120 000 rokov.

3.7a	Určte rýchlosti akumulácie c_ia a c_ig.	0.8
3.7b	Použite dáta z obr. 3.2 a zistite zmenu teploty pri prechode z doby ľadovej do doby medziľadovej.	0.2

Zodvihnutie hladiny oceánu roztopením grónskeho ľadovca

Celkové roztopenie grónskeho ľadovca spôsobí globálne zvýšenie hladiny oceánu. Pre hrubý odhad možno uvažovať rovnaké zvýšenie hladiny na celej ploche oceánu $A_\mathrm{O} = 3{,}61 \times 10^{14}\ \mathrm{m}^2$.

3.8	Určte priemerný nárast výšky hladiny oceánu v dôsledku úplného roztopenia grónskej ľadovcovej vrstvy, ktorý má súčasnú plochu $A_\mathrm{G} = 1{,}71 \times 10^{12}\mathrm{m}^2$ a $S_\mathrm{b} = 100\ \mathrm{kPa}$.	0.6

Masívna grónska ľadová vrstva vytvára gravitačný ťah pre okolitý oceán. Keď sa ľad roztopí, zanikne tento lokálny príliv a hladina v blízkosti Grónska poklesne, čo čiastočne zredukuje nárast hladiny oceánu z predchádzajúceho výpočtu.

Na odhad veľkosti tohto gravitačného priťahovania vody, grónsky ľad si predstavíme ako hmotný bod na úrovni podložia s hmotnosťou grónskej ľadovej vrstvy. Copenhagen leží vo vzdialenosti 3 500 km pozdĺž zemského povrchu od stredu tejto gule. Možno si predstaviť Zem bez tohto hmotného bodu ako sféricky symetrickú a s oceánom rozprestierajúcim sa po celom povrchu Zeme $A_\mathrm{E} = 5.10 \times 10^{14}\mathrm{m}^2$. Všetky javy súvisiace s rotáciu zanedbáme.

3.9	V rámci tohto modelu určte rozdiel $h_\mathrm{CPH} - h_\mathrm{OPP}$ medzi výškami hladín mora v Copenhagene (h_CPH) a na diametrálne opačnej strane voči Grónsku (u protinožcov) (h_OPP).	1.8