45th International Physics Olympiad
Astana, Kazakhstan
Theoretical Competition

Tuesday, 15 July 2014

Čítajte najprv:

Súťaž trvá **5 hodín** a riešite **3 úlohy**, za ktoré môžete získať celkovo **30 bodov**.

Používajte iba pero, ktoré ste dostali.

Môžete používať iba kalkulačku, ktorú ste dostali. Svoje číselne výsledky zaokruhľujte na toľko platných cifier na koľko platných cifier sú zadané hodnoty veličín. Nezabúdajte na jednotky!

Konečné výsledky zapisujte do **Answer Sheets**. Svoj postup píšte na **Writing Sheets**. Zapisujte všetko, čo si myslíte, že je nevyhnutné k riešeniu danej úlohy, a čo by mohlo byť bodované. Používajte *čo najmenej textu* a vyjadrujte sa pomocou vzorcov, čísel, symbolov a náčrtov. Používajte len **prednú stranu všetkých hárkov** a *výsledky zapisujte presne do rámčekov*.

Nezabúdnite do rámčekov v hornej časti zapísať svoj kód študenta (**Student Code**) na každý použitý hárok. Pracovné hárky (Writing Sheets) každej úlohy v hornej časti vypíšte číslom úlohy (**Problem No.**), ktorú časť úlohy riešite (**Part**), číslom strany (**Page No.**) lomené celkovým počtom strán hárkov, ktoré ste použili pre danú úlohu (**Total No. of Pages**). Ak nechcete, aby niektoré hárky boli hodnotené, tak ich preškrtnite.

Na konci usporiadajte hárky pre **každú úlohu** v nasledujúcom poradí:

- hárok odpovedí - answer sheets;
- pracovné hárky - working sheets - vzostupne;
- pracovné hárky - working sheets - preškrtnuté;
- nepoužité pracovné hárky;
- zadanie úlohy.

Takto usporiadané hárky vložte do príslušnej obálky a všetko ostatné nechajte na stole. *Nesmiete vyniesť žiaden hárok z miestnosti!*

Ak potrebujete ísť na toaletu zdvihnite modrú tabuľku s nápisom “TOILET”.

Ak mate nejaký iný problém (kalkulačka je pokazená, potrebujete ďalšie hárky na písanie), zdvihnite červenú tabuľku s nápisom “HELP”.

Teoretická časť

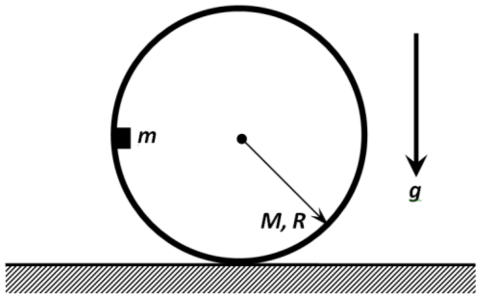
Utorok 15. júla 2014

1. úloha (9 bodov)

Úloha pozostáva z troch nezávislých častí

Časť A (3 body)

Malé teliesko s hmotnosťou m je opatrne priložené k vnútornému povrchu tenkého dutého valca s hmotnosťou M a polomerom R. Na začiatku je valec v pokoji na vodorovnej podložke a teliesko sa nachádza vo výške R nad podložkou, ako vidno na obrázku 1/1. Určte veľkosť F sily vzájomného pôsobenia medzi telieskom a valcom v okamihu keď teliesko prechádza najnižším bodom svojej trajektórie. Predpokladajte nulové trenie medzi valcom a telieskom a pohyb valca po podložke bez prešmykovania. Zrýchlenie voľného pádu je g.



Obrázok 1/1

Časť B (3 body)

Bublina s polomerom $r = 5{,}00$ cm, ktorá obsahuje ideálny plyn dvojatómových molekúl, je tvorená mydlovou vrstvou s hrúbkou $h = 10{,}0$ μm a nachádza sa vo vákuu. Povrchové napätie mydlového roztoku je $\sigma = 4{,}00 \times 10^{-2}$ N/m a hustota $\rho = 1{,}10$ g/cm^3.

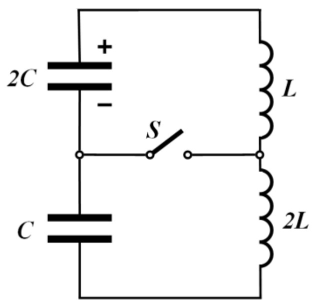
1) Odvoďte vzťah pre molárnu tepelnú kapacitu plynu v bubline pre dej, pri ktorom sa plyn zohrieva tak pomaly, že bublina zostáva stave mechanickej rovnováhy, a vypočítajte jej hodnotu.

2) Odvoďte vzťah pre uhlovú frekvenciu ω malých radiálnych kmitov bubliny a vypočítajte jej hodnotu za predpokladu, že tepelná kapacita mydlovej vrstvy je oveľa väčšia ako tepelná kapacita plynu v bubline. Predpokladajte, že tepelná rovnováha vo vnútri bubliny sa dosiahne za oveľa kratší čas ako je perióda kmitov.

Pomôcka: Laplace ukázal, že rozdiel tlaku medzi vnútornou a vonkajšou stranou zakriveného rozhrania kvapaliny a plynu spôsobený povrchovým napätím je $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$.

Časť C (3 body)

V začiatočnom okamihu je v obvode na obrázku 1/2 spínač S rozpojený, kapacitor $2C$ má náboj q_0, kapacitor C má nulový náboj a prúd obidvoch cievok L, $2L$ je nulový. Kapacitor sa začne vybíjať a v okamihu, keď prúd cievok dosiahne maximálnu hodnotu sa zopne spínač S. Určte maximálnu hodnotu I_{max} prúdu spínača S po jeho zopnutí.



Obrázok 1/2

2. úloha – Van der Waalsova stavová rovnica (11 bodov)

V modeli ideálneho plynu, ktorého stavovú rovnicu opisuje Clapeyronov–Mendelejevov zákon, sa zanedbávajú nasledujúce skutočnosti – molekuly reálneho plynu majú konečné rozmery a navzájom interagujú. V celej nasledujúcej časti sa uvažuje *jeden mól vody*.

Časť A. Stavová rovnica neideálneho plynu (2 body)

Ak berieme do úvahy konečné rozmery molekúl, má stavová rovnica plynu tvar

$$P(V-b)=RT, \qquad (1)$$

kde P, V, T sú tlak, objem a teplota plynu, R plynová konštanta a b je charakteristická konštanta, ktorá zodpovedá odstráneniu časti objemu.

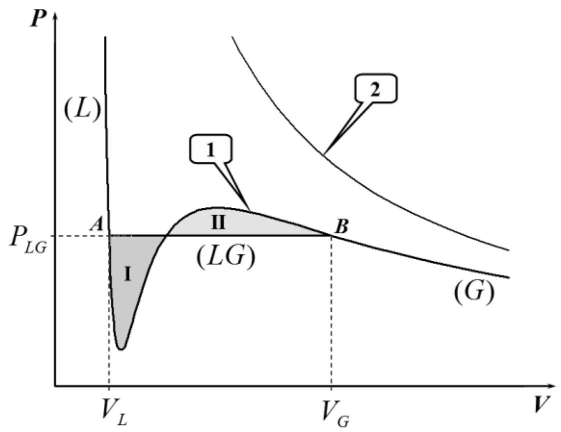
A1	Vyjadrite b pomocou priemeru molekuly d. (0,3 bodu)

S uvážením medzimolekulárnej príťažlivosti navrhol van der Waals stavovú rovnicu, ktorá prehľadne opisuje ako plynný tak aj kvapalný stav látky

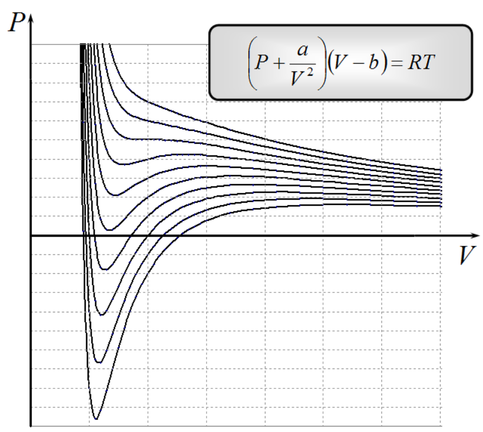
$$\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT, \qquad (2)$$

kde a je ďalšie charakteristická konštanta.

Pri teplote nižšej ako určitá kritická hodnota T_c je izoterma podľa rovnice (2) opísaná nemonotónnou krivkou (1) v obrázku 2/1, ktorá sa nazýva van der Waalsova izoterma. V tom istom obrázku krivka (2) predstavuje izotermu ideálneho plynu pri rovnakej teplote. Skutočná izoterma sa líši od van der Waalsovej izotermy priamkovým úsekom AB, ktorý zodpovedá konštantnému tlaku P_{LG}. Tento úsek sa nachádza medzi objemami V_L a V_G a zodpovedá rovnováhe medzi kvapalnou (L–liquid) a plynnou (G–gasseous) fázou. Pomocou druhého zákona termodynamiky Maxwell ukázal, že tlak P_{LG} sa nájde tak, že obsahy plôch I a II sú rovnaké, obrázok 2/1 (a).



Obrázok 2/1 (a). Van der Waalsova izoterma plynu/kvapaliny (krivka (1)) a izoterma ideálneho plynu (krivka (2))



Obrázok 2/1 (b) Grafy niekoľkých izoterm pre van der Waalsovu stavovú rovnicu

S rastúcou teplotou sa priamy úsek AB skracuje, až pri dosiahnutí teploty T_c zaniká a redukuje sa na bod s tlakom $P_{LG} = P_c$. Hodnoty P_c a T_c sa označujú ako kritické a možno ich určiť experimentálne s vysokou presnosťou.

A2	Vyjadrite van der Waalsove konštanty a a b pomocou T_c a P_c. (1,3 bodu)
A3	Pre vodu T_c = 647 K a $P_c = 2{,}2\times10^7$ Pa. Vypočítajte a_w a b_w pre vodu. (0,2 bodu)
A4	Odhadnite priemer molekuly vody d_w. (0,2 bodu)

Časť B. Vlastnosti plynu a kvapaliny (6 bodov)

Táto časť úlohy pojednáva o vlastnostiach vody v plynnom a kvapalnom stave pri teplote T = 100 °C. Nasýtená para má pri tejto teplote tlak $p_{LG} = p_0 = 1{,}0\times10^5$ Pa a molárna hmotnosť vody $\mu = 1{,}8\times10^{-2}$ kg·mol^{-1}.

Plynný stav

Použite predpoklad $V_G >> b$ pri opise vody v plynnom stave.

B1	Odvoďte vzťah pre objem V_G a vyjadrite ho pomocou R, T, p_0 a a. (0,8 bodu)

Takmer rovnakú hodnotu objem V_{G0} možno približne určiť s použitím zákona pre ideálny plyn.

B2	Určte v percentách relatívny pokles objemu plynu spôsobený silami vzájomného pôsobenia molekúl, $\dfrac{\Delta V_G}{V_{G0}} = \dfrac{V_{G0} - V_G}{V_{G0}}$. (0,3 bodu)

Ak poklesne objem sústavy pod hodnotu V_G, plyn začne kondenzovať. Veľmi čistý plyn ale zostane v mechanicky metastabilnom stave nazývanom podchladená para až kým jej objem nedosiahne určitú hodnotu $V_{G\,min}$. Podmienka mechanickej stability podchladeného stavu pri konštantnej teplote je $dP/dV < 0$.

B3	Zistite v akom pomere možno znížiť objem pary $V_G/V_{G\,min}$, aby para zostala v metastabilnom stave. (0,7 bodu)

Kvapalný stav

Pre opis vody v kvapalnom stave pomocou van der Waalsovej rovnice je vhodné použiť predpoklad $P << a/V^2$.

B4	Vyjadrite objem V_L kvapalnej vody pomocou a, b, R a T. (1 bod)

Za predpokladu $bRT << a$ určte nasledujúce charakteristiky vody. *Nebuďte prekvapený, ak niektorý z údajov nebude súhlasiť so známou tabuľkovou hodnotou.*

B5	Vyjadrite hustotu kvapalnej vody ρ_L pomocou niektorých z parametrov μ, a, b, R

	a hodnotu vypočítajte. (0,3 bodu)
B6	Vyjadrite koeficient objemovej teplotnej rozťažnosti $\alpha = \dfrac{1}{V_L}\dfrac{\Delta V_L}{\Delta T}$ pomocou a, b, R a hodnotu vypočítajte. (0,6 bodu)
B7	Vyjadrite merné skupenské teplo L vyparovania vody pomocou μ, a, b, R a hodnotu vypočítajte. (1,1 bodu)
B8	Ak uvažujete monomolekulárnu vrstvu vody, odhadnite povrchové napätie σ vody. (1,2 bodu)

Časť C. Sústava kvapalina – plyn (12 bodov)

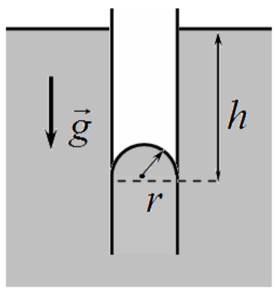
Z Maxwellovho pravidla (uvedená rovnosť plôch s použitím jednoduchého integrovania) a van der Waalsovej stavovej rovnice pri zjednodušeniach použitých v časti B možno ukázať, že tlak p_{LG} nasýtenej pary závisí od teploty podľa vzťahu

$$\ln p_{LG} = A + \frac{B}{T}, \qquad (3)$$

kde A, B sú konštanty, ktoré možno vyjadriť pomocou a a b:

$$A = \ln\left(\frac{a}{b^2}\right) - 1;\; B = -\frac{a}{bR}.$$

W. Thompson ukázal, že tlak nasýtenej vodnej pary závisí od zakrivenia povrchu kvapaliny. Uvažujte kvapalinu, ktorá nezmáča materiál kapiláry (kontaktný uhol 180°). Ak ponoríme kapiláru do kvapaliny, kvapalina v kapiláre poklesne na určitú úroveň z dôvodu povrchového napätia (obrázok 2/2).



Obr. 2/2 Kapilára ponorená v kvapaline, ktorá ju nezmáča

C3	Vyjadrite malú zmenu tlaku Δp_T nasýtenej pary nad zakriveným povrchom kvapaliny pomocou hustoty ρ_s pary, hustoty ρ_L kvapaliny, povrchového napätia σ a polomeru zakrivenia r povrchu kvapaliny. (1,3 bodu)

Metastabilný stav opisovaný v časti B3 sa často využíva rôznych experimentálnych zariadeniach, ako je hmlová komora na registráciu elementárnych častíc. V prírode sa prejavuje vznikom raňajšej hmly. Podchladená para kondenzuje na malé kvapôčky. Veľmi malé kvapôčky sa opäť hneď vyparia, ale väčšie sa môžu zväčšovať.

C4	Predpokladajte, že pri večernej teplote $t_e = 20$ °C dosiahne vodná para vo vzduchu stav nasýtenia, ráno teplota prostredia poklesne o malý rozdiel $\Delta t = 5{,}0$ °C. Za predpokladu, že tlak pary sa nezmení, odhadnite minimálny polomer kvapôčok, pri ktorom môžu narastať. Použite tabuľkovú hodnotu povrchového napätia vody $\sigma = 7{,}3\times10^{-2}$ N/m. (1,7 bodu)

3. úloha – Jednoduchý model výboja v plyne (10 bodov)

Prechod elektrického prúdu v plyne sa označuje ako elektrický výboj. Existuje viacero druhov výboja v plyne, napr. osvetľovacia žiarivka, elektrický oblúk pri zváraní alebo iskrový výboj medzi mrakmi a zemou pri búrke.

Časť A. Nesamostatný výboj v plyne (4,8 bodu)

V tejto časti ide o nesamostatný výboj v plyne. Na trvalé udržanie výboja je potrebný vonkajší ionizátor, ktorý generuje Z_{ext} párov jednomocne ionizovaných iónov a voľných elektrónov v jednotke objemu za jednotku času.

Keď sa vonkajší ionizátor zapne, počet iónov a voľných elektrónov začne narastať. Nekonečnému nárastu hustoty iónov a elektrónov bráni rekombinácia, pri ktorej sa voľný elektrón spojí s iónom za vzniku neutrálneho atómu. Počet rekombinácií Z_{rec} v jednotke objemu za jednotku času je daný vzťahom

$$Z_{\text{rec}} = r\, n_{\text{e}}\, n_{\text{i}},$$

kde r je konštanta s názvom koeficient rekombinácie, n_e, n_i sú hustoty elektrónov a iónov (hustota je v tejto úlohe počet častíc v jednotke objemu).

Predpokladajte, že v čase $t = 0$ sa zapne ionizátor a začiatočná hustota elektrónov i iónov je nulová. Časová závislosť hustoty $n_e(t)$ elektrónov je potom

$$n_e(t) = n_0 + a \tanh(bt),$$

kde n_0, a a b sú konštanty a $\tanh x$ predstavuje hyperbolický tangens.

A1	Vyjadrite n_0, a a b ako funkcie Z_{ext} a r. (1,8 bodu)

Predpokladajte, že sú k dispozícii dva ionizátory. Keď sa zapne iba prvý z nich, dosiahne hustota elektrónov ustálenú hodnotu $n_{e1} = 12\times10^{10}$ cm^{-3}. Keď sa zapne iba druhý ionizátor, hustota elektrónov dosiahne ustálenú hodnotu $n_{e2} = 16\times10^{10}$ cm^{-3}.

A2	Určte výslednú rovnovážnu hustotu elektrónov n_e, ak sa zapnú obidva ionizátory. (0,6 bodu)

Pozor!!! *V nasledujúcich častiach sa predpokladá, že ionizátor je zapnutý dostatočne dlho, aby sa hustota elektrónov ustálila na hodnote nezávislej od času. Neuvažujte vplyv elektrického poľa vznikajúcich častíc s nábojom.*

Predpokladajte, že plyn vypĺňuje priestor medzi dvomi rovnobežnými doskami s obsahom S a vzájomnou vzdialenosťou $L << \sqrt{S}$. Po pripojení zdroja napätia U k doskám vznikne medzi doskami elektrické pole. Predpokladajte, že hustota obidvoch druhov častíc je v priestore medzi doskami približne konštantná.

Uvažujte, že elektróny (index e) a ióny (index i) nadobudnú v elektrickom poli s intenzitou E rovnakú usporiadanú rýchlosť

$$v = \beta E,$$

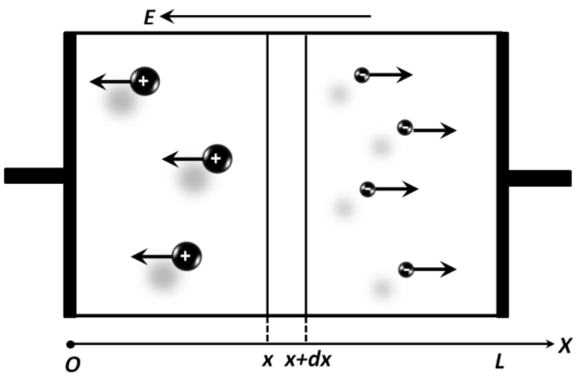
kde konštanta β sa nazýva pohyblivosť častíc.

A3	Vyjadrite elektrický prúd I medzi doskami pomocou U, β, L, S, Z_{ext}, r a elementárneho náboja e. (1,7 bodu)
A4	Vyjadrite rezistivitu ρ_{gas} plynu medzi doskami pre dostatočne malé hodnoty napätia U pomocou β, L, Z_{ext}, r a e. (0,7 bodu)

Časť B. Samostatný výboj v plyne (5 bodov)

V tejto časti ide o vznik samostatného výboja v plyne a ukazuje sa, ako sa prúd medzi elektródami samostatne udrží.

Pozor!!! *V nasledujúcej časti uvažujte, že vonkajší ionizátor naďalej pôsobí s rovnakým* Z_{ext}, *zanedbajte vlastné elektrické pole častíc s nábojom, takže elektrické pole medzi doskami je homogénne a rekombináciu možno celkom zanedbať.*



V prípade samostatného výboja sa uvažujú dva významné deje, ktoré sa neuvažovali v prvej časti. Prvým je sekundárna emisia elektrónov a druhým vytvorenie elektrónovej lavíny. Sekundárna emisia sa objaví, keď ión dopadne na zápornú elektródu – katódu, a uvoľní z nej elektrón, ktorý sa potom pohybuje ku kladnej elektróde – anóde. Pomer počtu emitovaných elektrónov $\dot{N}_{\mathrm{e}}$ za jednotku času a počtu $\dot{N}_{\mathrm{i}}$ iónov dopadajúcich na katódu za jednotku času sa nazýva koeficient sekundárnej emisie elektrónov $\gamma = \dot{N}_{\mathrm{e}} / \dot{N}_{\mathrm{i}}$. Vytvorenie elektrónovej lavíny sa vysvetľuje nasledovne. Elektrické pole urýchli voľný elektrón, ktorý tak získa kinetickú energiu potrebnú k ionizácii atómu plynu nárazom. V dôsledku toho počet elektrónov smerujúcich k anóde významne narastá. Tento proces charakterizuje Townsendov koeficient α, ktorý opisuje nárast počtu elektrónov $\mathrm{d}N_{\mathrm{e}}$ spôsobený pohybujúcimi sa N_{e} elektrónmi na dráhe $\mathrm{d}l$

$$\frac{\mathrm{d}N_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}l} = \alpha\, N_{\mathrm{e}}\,.$$

Celkový prúd I v ľubovoľnom priereze rovnobežnom s doskami pozostáva z prúdu $I_i(x)$ iónov a prúdu $I_e(x)$ elektrónov, ktorý v ustálenom stave závisí iba od súradnice x, pozri obrázok hore. Elektrónový prúd sa mení pozdĺž osi x

$$I_e(x) = C_1\, e^{A_1 x} + A_2,$$

kde A_1, A_2 a C_1 sú konštanty.

B1	Vyjadrite A_1 a A_2 pomocou Z_{ext}, α, e, L, S. (2 body)

Iónový prúd $I_i(x)$ sa mení pozdĺž osi x

$$I_i(x) = C_2 + B_1\, e^{B_2 x},$$

kde B_1, B_2 a C_2 sú konštanty.

B2	Vyjadrite B_1 a B_2 pomocou Z_{ext}, α, e, L, S, C_1. (0,6 bodu)
B3	Napíšte podmienku pre $I_i(x)$ na konci $x = L$. (0,3 bodu)
B4	Napíšte podmienku úre $I_i(x)$ a $I_e(x)$ na začiatku $x = 0$. (0,6 bodu)
B5	Vyjadrite celkový prúd I pomocou Z_{ext}, α, γ, e, L, S. Uvážte, že prúd zostane konečný. (1,2 bodu)

Nech je Townsendov koeficient α konštantný. Ak vzdialenosť medzi doskami prekročí určitú kritickú hodnotu $L > L_{cr}$, externý ionizátor možno vypnúť a výboj nezhasne – stane sa samostatným.

B6	Vyjadrite L_{cr} pomocou Z_{ext}, α, γ, e, L, S. (0,5 bodu)

1. úloha (9 points)

Answer	Marks
Part A (3 points)	
$F =$	
Part B(3 points)	
$C =$	
$\omega =$	
Part C (3 points)	
$I_{max} =$	

Van der Waalsova stavová rovnica (11 points)

Part	Answer	Marks
Part A. Stavová rovnica neideálneho plynu (2 points)		
A1. 0.3 pts	$b =$	
A2. 1.3 pts	$a =$ $b =$	
A3. 0.2 pts	$a_w =$ $b_w =$	
A4. 0.2 pts	$d_w =$	
Part B. Vlastnosti plynu a kvapaliny (6 points)		
B1. 0.8 pts	$V_G \approx$	
B2. 0.3 pts	$\left(\frac{\Delta V_G}{V_{G0}}\right) = \frac{V_{G0} - V_G}{V_{G0}}$	
B3. 0.7 pts	$\frac{V_G}{V_{Gmin}}$	
B4. 1.0 pts	V_L	

B5. 0.3 pts	$\rho_L =$	
B6. 0.6 pts	$\alpha = \frac{1}{V_L}\frac{\Delta V_L}{\Delta T} =$	
B7. 1.1 pts	$L =$	
B8. 1.2 pts	$\sigma =$	
Part C. Sústava kvapalina – plyn (3 points)		
C1. 1.3 pts	Δp_T	
C2. 1.7 pts	Minimálny polomer kvapôčky, ktorá môže narastať $r =$	

Jednoduchý model výboja v plyne (10 points)

Part	Answer	Marks
Part A. Nesamostatný výboj v plyne (4.8 points)		
A1. 1.8 pts	$n_0 =$ $a =$ $b =$	
A2. 0.6 pts	$n_e =$	
A3. 1.7 pts	$I =$	
A4. 0.7 pts	$\rho =$	
Part B. Samostatný výboj v plyne (5.2 points)		
B1. 2.0 pts	$A_1 =$ $A_2 =$	
B2. 0.6 pts	$B_1 =$ $B_2 =$	

B3. 0.3 pts	$I_i(L) =$	
B4. 0.6 pts	$I_i(0) =$ $I_e(0) =$	
B5. 1.2 pts	$I =$	
B6. 0.5 pts	$L_{cr} =$	