

LIGO-GW150914 (10 points)

V roku 2015 detektor gravitačných vln LIGO prvýkrát v histórii zaregistroval gravitačné vlny (*angl.* gravitational waves - GRW) prechádzajúce Zemou. Táto udalosť (označená ako GW150914) bola spôsobená dvomi čiernymi dierami, ktoré sa pohybovali po dvoch kvázi kružnicových trajektóriách (orbitách). V tejto úlohe budete odhadovať niektoré fyzikálne parametre tejto sústavy na základe vlastností zachyteného signálu.

Časť A: Newtonovské (konzervatívne) orbity (3.0 bodu)

- A.1** Uvažujme sústavu dvoch hviezd s hmotnosťami M_1, M_2 , ktorých polohy vzhľadom na ťažisko sústavy sú dané polohovými vektormi \vec{r}_1, \vec{r}_2 . Platí 1.0pt

$$M_1 \vec{r}_1 + M_2 \vec{r}_2 = 0. \quad (1)$$

Hviezdy sú izolované od zvyšku vesmíru a pohybujú sa malými rýchlosťami (takže stačí použiť Newtonovskú mechaniku). Podľa Newtonovho zákona je zrýchlenie hviezd s hmotnosťou M_1 dané vzťahom

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\alpha \frac{\vec{r}_1}{r_1^n}, \quad (2)$$

kde $r_1 = |\vec{r}_1|, r_2 = |\vec{r}_2|$. Nájdite $n \in \mathbb{N}$ a $\alpha = \alpha(G, M_1, M_2)$, kde G je gravitačná konštanta $G \simeq 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.

- A.2** Celkovú energiu sústavy dvoch telies na kruhových orbitách určuje vzťah 1.0pt

$$E = A(\mu, \Omega, L) - G \frac{M\mu}{L}, \quad (3)$$

kde

$$\mu \equiv \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}, \quad M \equiv M_1 + M_2, \quad (4)$$

sú *redukovaná hmotnosť* a *celková hmotnosť* sústavy, Ω je kruhová frekvencia a L je celková vzdialenosť hviezd $L = r_1 + r_2$. Nájdite explicitné vyjadrenie pre veličinu $A(\mu, \Omega, L)$.

- A.3** Rovnicu (3) môžeme zjednodušiť na tvar $E = \beta G \frac{M\mu}{L}$. Určte číslo β . 1.0pt

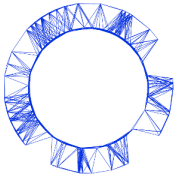
Časť B: Zavedenie relativistického tlmenia (7.0 bodu)

Teória gravitácie (Všeobecná teória relativity), ktorú sformuloval v roku 1915 Albert Einstein, predpokladá, že gravitačná interakcia sa šíri rýchlosťou svetla. Nosičom tejto interakcie sú gravitačné vlny (GRW). Gravitačné vlny sú emitované ľubovoľnou hmotou, ktorá má zrýchlenie, čo sa prejaví poklesom jej energie.

Uvažujme sústavu dvoch bodových častíc, ktoré sú izolované od zvyšku vesmíru. Einstein dokázal, že pre dostatočne malé rýchlosti emitované GRW

- 1) majú frekvenciu dvakrát väčšiu, ako je frekvencia orbitálneho pohybu častíc,

Theory



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q1-2

Slovakia (Slovakia)

2) môžeme opísať *luminozitu*, t.j. vyžarovaným výkonom \mathcal{P} , ktorý určuje Einsteinov kvadrupólový vzorec

$$\mathcal{P} = \frac{G}{5c^5} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right). \quad (5)$$

kde c je veľkosť rýchlosti svetla vo vákuu $c \approx 3 \times 10^8$ m/s. Pre sústavu dvoch bodových častíc pohybujúcich sa v rovine $x - y$ určuje Q_{ij} nasledujúca tabuľka (i, j sú čísla riadku, resp. stĺpca)

$$Q_{11} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2x_A^2 - y_A^2), \quad Q_{22} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2y_A^2 - x_A^2), \quad Q_{33} = -\sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (x_A^2 + y_A^2), \quad (6)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \sum_{A=1}^2 M_A x_A y_A, \quad (7)$$

a $Q_{ij} = 0$ pre všetky ostatné hodnoty. (x_A, y_A) sú súradnice polohy častice A v sústave spojennej s hmotným stredom.

B.1 Pre kružnicové trajektórie opísané v časti A.2 môžeme zložky Q_{ij} vyjadriť ako funkciu času t : 1.0pt

$$Q_{ii} = \frac{\mu L^2}{2} (a_i + b_i \cos kt), \quad Q_{ij} \stackrel{i \neq j}{=} \frac{\mu L^2}{2} c_{ij} \sin kt. \quad (8)$$

Vyjadrite k pomocou Ω a určte číselné hodnoty konštánt a_i, b_i, c_{ij} .

B.2 Odvodte nasledujúci vzťah pre luminozitu (výkon) \mathcal{P} emitovanú vo forme GRW touto sústavou: 1.0pt

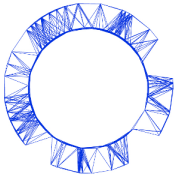
$$\mathcal{P} = \xi \frac{G}{c^5} \mu^2 L^4 \Omega^6. \quad (9)$$

Určte hodnotu ξ . [Ak sa vám nepodarilo nájsť hodnotu ξ , použite v ďalších výpočtoch $\xi = 6.4$.]

B.3 Pri absencii GRW by sa obidve telesá pohybovali po stálych kružnicových trajektóriách nekonečne dlho. Ale emitovanie GRW spôsobuje pokles energie sústavy, v dôsledku čoho telesá prechádzajú na trajektórie so stále menšími polomerami. Ukážte, že časová zmena uhlovej rýchlosti $\frac{d\Omega}{dt}$ je daná vzťahom 1.0pt

$$\left(\frac{d\Omega}{dt} \right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} (GM_c)^5, \quad (10)$$

kde M_c nazývame *cvrlikajúca hmotnosť - chirp mass*. Vyjadrite M_c ako funkciu M a μ . Táto hmotnosť je daná rýchlosťou, ktorou sa zväčšuje frekvencia rotácie pri prechode na orbitu s menším polomerom. [Názov "cvrlikajúca" je inšpirovaný zvukom, ktorý vydávajú malé vtáčiky a ktorý je charakteristický zväčšujúcou sa frekvenciou.]



- B.4** Pomocou vyššie uvedených informácií nájdite vzťah medzi uhlovou rýchlosťou Ω a frekvenciou f_{GW} gravitačných vln. S prihliadnutím k tomu, že pre ľubovoľnú hladkú funkciu $F(t)$ a $a \neq 1$ platí 2.0pt

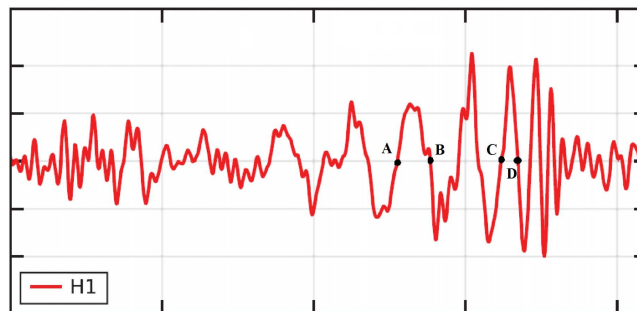
$$\frac{dF(t)}{dt} = \chi F(t)^a \quad \Rightarrow \quad F(t)^{1-a} = \chi(1-a)(t-t_0), \quad (11)$$

kde χ je konštanta a t_0 je integračná konštanta, ukážte, že z rovnice (10) vyplýva pre frekvenciu GRW

$$f_{\text{GW}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3}\xi \left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{2/3+p} (t_0 - t)^{2-p} \quad (12)$$

a určte konštantu p .

14. septembra 2015 zaregistrovalo LIGO udalosť GW150914. Detektor LIGO má tvar písmena L, pozostávajúceho z dvoch ramien dlhých 4 km. Dĺžka ramien detektora sa menila počas experimentu podľa obrázku 1. Vplyv gravitačnej vlny na ramená je lineárny. V tomto prípade vlnu vytvorili dve čierne diery na kvázi kružnicových trajektóriách. Strata energie vyvolaná emitovaním gravitačných vln spôsobila postupné znižovanie polomeru orbity a následnú zrážku čiernych dier. Pík, ktorý sa objavil na grafe za bodom D, obr. 1, približne zodpovedá zrážke.



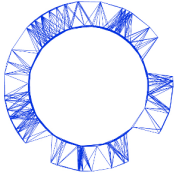
Obrázok 1. Časová závislosť relatívnej zmeny dĺžky každého ramena detektora H1. Na vodorovnej osi je čas, pričom bodom A, B, C, D zodpovedajú hodnoty $t = 0.00, 0.009, 0.034, 0.040$ s.

- B.5** Pomocou obrázka 1 odhadnite $f_{\text{GW}}(t)$ v čase 1.0pt

$$t_{\text{AB}} = \frac{t_B + t_A}{2} \quad \text{a} \quad t_{\text{CD}} = \frac{t_D + t_C}{2}. \quad (13)$$

Predpokladajme, že rovnica (12) platí počas celého približovania čiernych dier až do okamihu ich vzájomnej zrážky, a že majú rovnaké hmotnosti. Odhadnite hodnotu cvrlikajúcej hmotnosti a tiež hodnotu celkovej hmotnosti sústavy a vyjadrite ich ako násobky hmotnosti Slnka $M_{\odot} \simeq 2 \times 10^{30}$ kg.

Theory



IPHO 2018
Lisbon, Portugal

Q1-4

Slovakia (Slovakia)

- B.6** Odhadnite minimálnu vzájomnú vzdialenosť dvoch telies v čase t_{CD} . Potom odhadnite maximálny polomer každého telesa R_{max} . Pomocou vzťahu R_{\odot}/R_{max} porovnajte tieto hodnoty s polomerom Slnka $R_{\odot} \simeq 7 \times 10^5$ km. Ďalej odhadnite obvodovú rýchlosť každého telesa na orbite v_{col} a porovnajte ju s rýchlosťou svetla vo vákuu v_{col}/c . 1.0pt

Dôjdite k záveru ide o extrémne rýchlo sa pohybujúce extrémne kompaktné objekty.